Réduction des équations variationnelles des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté. Application à leur intégrabilité.

Ainhoa Aparicio Monforte (travail commun avec J.-A. Weil)

JNCF CIRM Luminy, Marseille 2008

Plan :

Systèmes hamiltoniens

`Système hamiltonien (S)` sur un domaine non vide $U \subset \mathbb{C}^{2n}$:

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(q,p) \\ \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(q,p) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

où $H : U \to \mathbb{C}$ est la fonction `hamiltonienne` $\mathcal{C}^1(U)$.
On dit que $G(q,p)$ est une `intégrale première` si :

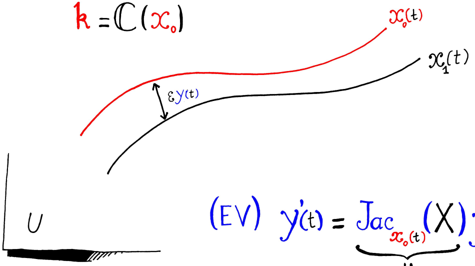
$$x(t) \; solution\, de\, (S) \Rightarrow G(x(t)) = cte$$

(S) est `intégrable` au sens de Liouville s'il admet n intégrales premières `fonctionellement indépendantes` et `en involution` .

Équation variationelle

(S) $x'(t) = X(x(t))$, x_0 et $x_1 = x_0(t) + \varepsilon y(t)$ solutions (S)

$k = \mathbb{C}(x_0)$



(EV) $y'(t) = \underbrace{Jac_{x_0(t)}(X)}_{A} \, y(t)$

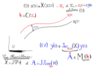
$A \in M_{2n \times 2n}(k)$

Cas Hamiltonien :

$X = J\nabla H$ et $A = J\,Hess_{x_0(t)}(H)$

$$\boxed{\text{(S) intégrable} \Rightarrow \text{(EV) "Liouville-Galois int."}}$$

Critère galoisien de non intégrabilité



- $x_0 = x_0(t)$ solution particulière de (S).
- $k = \mathbb{C}(x_0)$: corps de base
- L' extension de Picard Vessiot : $K = k(U_1)$ où U_1 MFS de (EV) le long de x_0.
- Le groupe de Galois : $G = \partial Aut_k(K)$
  G est un groupe linéaire algébrique.
  G° composante connexe contenant Id.
- $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie de G : espace tangent à G en Id.
- Théorème (J.J. Morales, J.P. Ramis)
  Si (S) est un système hamiltonien Liouville intégrable alors $\mathfrak{g}$ abélienne (c'est à dire G° abélien).
  (décidable constructivement : Singer, Ulmer, etc)

Historique

XIX^e : Kovalevskaya, Poincaré :

équation variationnelle (EV) le long d'une solution

~ 84 : Ziglin : monodromie de (EV) vs intégrabilité
Yoshida et al. , raffinements et applications

$93 - 95$: Baider-Churchill-Rod-Singer, Morales : Groupe de Galois

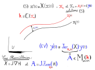
98 : Morales & Ramis :

Le groupe de Galois différentiel de (EV) est virtuellement abélien

$\sim 95 - 06$: au moins 50 articles et applications
(e.g Morales, Simon, Tsygvintsev, Maciejewski, Przybylska, Audin, Boucher, Weil, etc).
En général en se servant de l'algo de Kovacic (EV 2^{nd} *ordre*).

~ 04 : Morales-Ramis-Simo : (EV) d'ordre supérieur.

Méthodes usuelles et contributions



L'approche habituelle :

$$(S) \xrightarrow{\textit{linéarisation}} \begin{matrix}(EV):\ Y' = AY \\ A \in M_{2n\times 2n}(k)\end{matrix} \overset{\textit{réduc. symp.}}{\rightsquigarrow} \begin{matrix}(ENV):\ Y' = BY \\ B \in M_{(2n-2)\times(2n-2)}(k)\end{matrix}$$

- (ENV) non intégrable $\longrightarrow$ (S) non intégrable
- (ENV) intégrable $\longrightarrow$ variationnelles d'ordre supérieur.

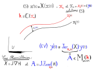
Notre approche :

idée 1 : possible que (ENV) intégrable MAIS (EV) non intégrable : algo 1 de "relèvement" de (ENV) à (EV)

idée 2 : si (EV) intégrable, l' algo 1 le met sous forme réduite pour usage futur :

réduite :="La plus creuse possible en restant rationnel"

Méthodes usuelles et contributions



L'approche habituelle :

$$(S) \xrightarrow{\textit{linéarisation}} (EV) : Y' = AY \quad \overset{\textit{réduc. symp.}}{\rightsquigarrow} \quad (ENV) : Y' = BY$$
$$A \in M_{2n\times 2n}(k) \qquad\qquad B \in M_{(2n-2)\times(2n-2)}(k)$$

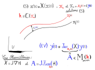
- (ENV) non intégrable $\longrightarrow$ (S) non intégrable
- (ENV) intégrable $\longrightarrow$ variationnelles d'ordre supérieur.

Notre approche :

idée 1 : possible que (ENV) intégrable MAIS (EV) non intégrable : algo 1 de "relèvement" de (ENV) à (EV)
idée 2 : si (EV) intégrable, l' algo 1 le met sous forme réduite pour usage futur :

réduite :="La plus creuse possible en restant rationnel"

Notre notion de système réduit



Principe : il n'y a pas de notion de "forme normale" *globale* canonique

Soit $Y' = AY$ un syst. diff. lin, et soit $Y = P \cdot Z$ un changement de variable linéaire

Changement de jauge : $P[A] := P^{-1}(AP - P')$.

$$Y' = AY' \Leftrightarrow Z' = P[A]Z.$$

Contribution :

Un système Y'=AY hamiltonien est sous forme réduite quand il a subi un changement de jauge $P[A]$ tel que :

- P symplectique afin que A demeure hamiltonienne
- $P \in GL_{2n}(\bar{k})$ afin que G° ne soit pas modifié
- P[A] est "la plus creuse possible" $(P[A] \in \mathfrak{g}(\bar{k}))$

Système réduit

Théorème (Kovacic / Kolchin) : Soit $H \supset G^{\circ}$ un groupe linéaire algébrique connexe, et soit $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie, alors il existe $P \in GL_{2n}(\bar{k})$ telle que

$$P[A] \in \mathfrak{h}(\bar{k}).$$

formalise l'idée que A est "la plus creuse possible"

Application pour $n = 2$: Le Problème de Hill

Le problème de Hill : simplification du problème des trois corps, Terre-Lune-Soleil. (Morales, Simó & Simon 05)

$$H := \mathbf{i}(q_1 q_2 - p_1 p_2) - 4 q_1 q_2 (q_1 p_1 - q_2 p_2) - 4\mathbf{i}(3q_1^4 - 2q_1^2 q_2^2 + 3q_2^4) q_1 q_2$$

Champ hamiltonien : $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ (non linéaire)

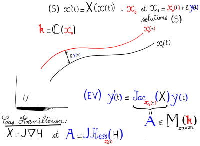
Variété invariante : $\Pi : q_2 = 0, p_1 = 0$

Solution particulière : $x_0 = (f, 0, 0, \mathbf{i}f')$, corps $k = \mathbb{C}(f, f')$

Avec, $f(t) = \frac{h}{3\wp(t)+1}$ et $\wp(t) = \wp(t; g_2; g_3)$ telles que $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, et $g_2 = 4/3$ et $g_3 = 8/27 + 64h^2$.

Système variationnel

Le `système variationnel` le long de la solution x_0 est $Y' = J\mathcal{H}(H, x_0) \cdot Y$ de matrice



$$A = J\mathcal{H}(H, x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4f^2 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i}\frac{f''}{f'} & 0 & 0 \\ \mathbf{i}\frac{f''}{f'} & -8\mathbf{i}f'f & 4f^2 & 0 \end{pmatrix}$$

x_0' `est une sol. part. de (EV) :` réduisons l'ordre de (EV) grâce au changement de jauge symplectique (Boucher, Weil)

$$P = \begin{pmatrix} \mathtt{f}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{i}\mathtt{f}''/\mathtt{f}' & 1/\mathtt{f}' & 0 \\ \mathtt{i}\mathtt{f}'' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Y = P \cdot Z$$

$Gal_{diff}(ENV)$ abélien

Transformation de jauge : $A_1 = P[A] = P^{-1}(AP - P')$
Avec P changement de variable

- ⋆ symplectique afin que $P[A]$ reste hamiltonienne
- ⋆ à coefficients en k pour ne pas changer G.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4f^2/f' & 0 & -\mathbf{i}/f' \\ 0 & f''/f' & -\mathbf{i}/f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\mathbf{i}ff' & \frac{f^2}{f'} & -f''/f' \end{pmatrix}$$

En rouge : (ENV) qui donne lieu au système ($Q \in \mathbb{C}[x]$) :

$$\begin{cases} u_1' &= f''u_1/f' \\ u_2' &= -8\mathbf{i}ff'u_1 - f''u_2/f' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 &= c_2 f' \\ u_2 &= -c_1/f' + c_2 Q(f)/f' \end{cases}$$

$\boxed{Gal_{diff}(ENV) = \partial Aut_k(k) = \{ Id \}.}$ facile à réduire !

$Gal_{diff}(ENV)$ abélien

Transformation de jauge : $A_1 = P[A] = P^{-1}(AP - P')$
Avec P changement de variable

- ⋆ `symplectique` afin que $P[A]$ reste `hamiltonienne`
- ⋆ `à coefficients en` k pour ne pas changer G.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4f^2/f' & 0 & -\mathbf{i}/f' \\ 0 & f''/f' & -\mathbf{i}/f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\mathbf{i}ff' & \frac{f^2}{f'} & -f''/f' \end{pmatrix}$$

En `rouge : (ENV)` qui donne lieu au système ($Q \in \mathbb{C}[x]$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1' & = & f''u_1/f' \\ u_2' & = & -8\mathbf{i}ff'u_1 - f''u_2/f' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & c_2 f' \\ u_2 & = & -c_1/f' + c_2 Q(f)/f' \end{array} \right.$$

$\boxed{Gal_{diff}(ENV) = \partial Aut_k(k) = \{ Id \}.}$ `facile à réduire !`

$Gal_{diff}(ENV)$ abélien

Transformation de jauge : $A_1 = P[A] = P^{-1}(AP - P')$
Avec P changement de variable

- ⋆ symplectique afin que $P[A]$ reste hamiltonienne
- ⋆ à coefficients en k pour ne pas changer G.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4f^2/f' & 0 & -\mathbf{i}/f' \\ 0 & f''/f' & -\mathbf{i}/f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\mathbf{i}ff' & \frac{f^2}{f'} & -f''/f' \end{pmatrix}$$

En rouge : (ENV) qui donne lieu au système ($Q \in \mathbb{C}[x]$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1' & = & f''u_1/f' \\ u_2' & = & -8\mathbf{i}ff'u_1 - f''u_2/f' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & c_2 f' \\ u_2 & = & -c_1/f' + c_2 Q(f)/f' \end{array} \right.$$

$$\boxed{Gal_{diff}(ENV) = \partial Aut_k(k) = \{\, Id \,\}.}$$ facile à réduire !

$Gal_{diff}(ENV)$ abélien

Transformation de jauge : $A_1 = P[A] = P^{-1}(AP - P')$
Avec P changement de variable

- ⋆ `symplectique` afin que $P[A]$ reste `hamiltonienne`
- ⋆ `à coefficients en` k pour ne pas changer G.

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 4f^2/f' & 0 & -\mathbf{i}/f' \\ \hline 0 & f''/f' & -\mathbf{i}/f' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\mathbf{i}ff' & \frac{f^2}{f'} & -f''/f' \end{array}\right)$$

En `rouge : (ENV)` qui donne lieu au système ($Q \in \mathbb{C}[x]$) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1' & = & f''u_1/f' \\ u_2' & = & -8\mathbf{i}ff'u_1 - f''u_2/f' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & c_2 f' \\ u_2 & = & -c_1/f' + c_2 Q(f)/f' \end{array}\right.$$

$\boxed{Gal_{diff}(ENV) = \partial Aut_k(k) = \{\, Id \,\}.}$ `facile à réduire !`

Réduction de (ENV) et non intégrabilité

Soit P_1 la transformation de jauge "qui réduit (ENV)" :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{f}' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\mathtt{f}' & 0 & \mathtt{Q(f)/f}' \end{pmatrix} \quad où\ Q \in \mathbb{C}[x].$$

Soit $A_2 = P_1[A_1]$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathtt{a}_1 & a_3 & \mathtt{a}_2 \\ 0 & 0 & \mathtt{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f_1' = a_1 \\ f_2' = a_2 \end{cases}$$

on montre que : $f_i \notin k, \ \ i = 1, 2.$

À partir de maintenant, tout se ramène à des calculs de primitives

Réduction de (ENV) et non intégrabilité

Soit P_1 la transformation de jauge "qui réduit (ENV)" :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f' & 0 & Q(f)/f' \end{pmatrix} \quad o\grave{u}\ Q \in \mathbb{C}[x].$$

Soit $A_2 = P_1[A_1]$

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -a_1 & a_3 & a_2 \\ \hline 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} f_1' & = & a_1 \\ f_2' & = & a_2 \end{cases}$$

on montre que : $f_i \notin k, \ i = 1, 2.$

À partir de maintenant, tout se ramène à des calculs de primitives

Obstruction galoisienne à l'intégrabilité

Action de G sur f_1 et f_2 : on démontre que $f_1, f_2 \notin k$ et donc que pour $g \in G$, $g(f_i) = f_i + c_i$, où c_i parcourt $\mathbb{C}$ et donc

$$G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & c_3 & c_2 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix}, \, c_1, \, c_2, \, c_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Lemme : G abélien $\Leftrightarrow\ \exists \mu \in \mathbb{C}$ tel que $\forall g \in G$, $c_1 = \mu c_2$.
Le lemme implique que

$$\forall g \in G, \; g(f_2 - \mu f_1) = f_2 - \mu f_1 \; \Rightarrow \; f_2 - \mu f_1 \in k. \,(Ostrowski)$$

Ceci se teste constructivement $\longrightarrow$ Réponse : NON ici.

G non abélien et donc (S) est non intégrable.

Obstruction galoisienne à l'intégrabilité

Action de G sur f_1 et f_2 : on démontre que $f_1, f_2 \notin k$ et donc que pour $g \in G$, $g(f_i) = f_i + c_i$, où c_i parcourt $\mathbb{C}$ et donc

$$G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & c_3 & c_2 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Lemme : G abélien $\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}$ tel que $\forall g \in G,\ c_1 = \mu c_2$.
Le lemme implique que

$$\forall g \in G,\ g(f_2 - \mu f_1) = f_2 - \mu f_1 \Rightarrow f_2 - \mu f_1 \in k.\ (\mathit{Ostrowski})$$

Ceci se teste constructivement $\longrightarrow$ Réponse : NON ici.

G non abélien et donc (S) est non intégrable.

Obstruction galoisienne à l'intégrabilité

Action de G sur f_1 et f_2 : on démontre que $f_1, f_2 \notin k$ et donc que pour $g \in G$, $g(f_i) = f_i + c_i$, où c_i parcourt $\mathbb{C}$ et donc

$$G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c_1 & c_3 & c_2 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix}, \; c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Lemme : G abélien $\Leftrightarrow\ \exists \mu \in \mathbb{C}$ tel que $\forall g \in G,\ c_1 = \mu c_2$.
Le lemme implique que

$$\forall g \in G,\ g(f_2 - \mu f_1) = f_2 - \mu f_1 \ \Rightarrow\ f_2 - \mu f_1 \in k. \,(Ostrowski)$$

Ceci se teste constructivement $\longrightarrow$ Réponse : NON ici.

$\boxed{G \text{ non abélien et donc (S) est non intégrable.}}$

Principe général pour $n = 2$

Étape 1 réduction de (ENV) $\rightsquigarrow$
Solutions rationnelles (ou exponentielles) : Kovacic ou variantes (Van Hoeij, Ulmer, Weil, etc)

$\rightsquigarrow$ Soit $G^\circ \notin \{\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \{Id\}\}$ $\rightsquigarrow$ (S) non intégrable STOP
$\rightsquigarrow$ Soit $G^\circ \in \{\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \{Id\}\}$ $\rightsquigarrow$ Étape 2

Étape 2 relèvement de (ENV) à (EV) $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ *calculs de primitives* $\rightsquigarrow$

Résultat :	(S) non intégrable *ou bien* (EV) sous forme réduite

Principe général pour n arbitraire

Étape 1 réduction de (ENV) $\rightsquigarrow$
Solutions rationnelles (ou exponentielles) : Kovacic ou variantes (Van Hoeij, Ulmer, Weil, etc)

$\rightsquigarrow$ Soit $\mathfrak{g}$ non abélienne $\rightsquigarrow$ (S) non intégrable STOP
$\rightsquigarrow$ Soit $\mathfrak{g}$ abélienne $\rightsquigarrow$ Étape 2

Étape 2 relèvement de (ENV) à (EV) $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ *calculs de primitives* $\rightsquigarrow$ Résultat : (S) non intégrable *ou bien* (EV) sous forme réduite

Implantation

Notre algorithme de réduction retourne :

Sortie :

$$\begin{array}{c} \texttt{dit "(S) non intégrable"} \\ \textit{ou} \\ \texttt{met (EV) sous forme réduite} \quad (\mathtt{A} \in \mathfrak{g}(\bar{\mathtt{k}})) \\ \texttt{pour utilisation dans} \\ \texttt{variationelles supérieures.} \end{array}$$

Intégration en cours : bibliothèque ISOLDE (Barkatou-Pfluegel)
http ://isolde.sourceforge.net/

Perspectives

Généralisation : $2n > 4$.

Variationnelles supérieures : critères de (non)intégrabilité des variationnelles supérieures (avec Simon & Weil).

Reconstruction de germes d'intégrales premières et leur impact dynamique.

Annexe

Groupe de Galois différentiel

$k = C(x_0)$: corps des coeff. de la sol. x_0 *de* (S)
L' `extension de Picard Vessiot :` $K = k(U_1)$ où U_1 MFS de (EV) le long de x_0.
Le `Groupe de Galois :` G de (EV) objet classifiant.

$\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{Gal}_{diff}(EV) = \partial Aut_k(K)}$ G est un groupe linéaire algébrique

L' `algèbre de Lie` $\mathfrak{g}$ du groupe G est son espace tangent en l'identité.

Le Théorème de Morales-Ramis

Théorème (J.J. Morales, J.P. Ramis)

Soit un système hamiltonien (S) et son équation variationnelle associée (EV) : $Y' = AY$ le long d'une solution $x_0(t)$ de (S) et soit $G = Gal_{diff}(EV)$. Si le système (S) est complètement intégrable, alors $\mathfrak{g}$ est abélienne (c'est à dire G° abélien).