Développements de fonctions D-finies sur des polynômes de Tchebychev

Journée nationale du calcul formel

Alexandre Benoit,
Sous la direction de Bruno Salvy

Centre de recherche commun Inria-Microsoft Research

20 Octobre 2008

I Introduction

Séries de Tchebychev

Représentation d'une fonction analytique f.

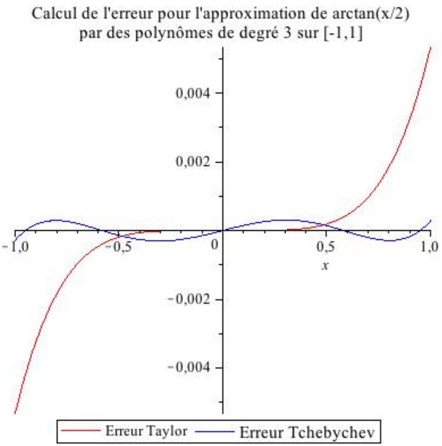
En série de Taylor :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \ \ c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

ou de Tchebychev :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n T_n(x),$$

$$t_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} T_n(t) \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$



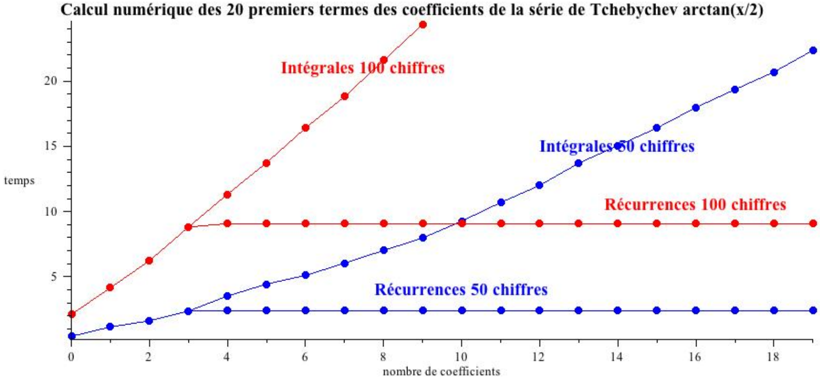
Problème: Calcul efficace des t_n quand f est D-finie

Le calcul numérique d'intégrales est très coûteux. La notion de D-finitude permet d'utiliser d'autre propriétés.

Récurrence

Proposition (Classique)

Les coefficients d'une série de Tchebychev solution d'une équation différentielle linéaire vérifient une récurrence linéaire.



Exemple avec $\arctan(x/2) \rightarrow (4+x^2)y'' + 2xy' = 0$

Récurrence

Proposition (Classique)

Les coefficients d'une série de Tchebychev solution d'une équation différentielle linéaire vérifient une récurrence linéaire.

Objectif du stage

Calculer efficacement la récurrence de Tchebychev à partir d'une équation différentielle linéaire.

Contributions

- Étude théorique du problème
- Nouvel algorithme efficace
- Implantation sur maple

```
> def:=(4+x^2)*diff(y(x),x,x)+2*x*diff(y(x),x);
```

$$def := (x^2+4)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 2x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)$$

```
> Chebyshev:-diffeqtorecchebyshev(def,y(x),t(n))=0;
```

$$n\,t(n) + (36+18n)\,t(n+2) + (n+4)\,t(n+4) = 0$$

```
> r:=rsolve({%,seq(t(i)=1/Pi*int(arctan(x/2)*T(i,x)/sqrt(1-x^2),x=-1..1),i=0..3)}
,t(n)):
> simplify(evalc(allvalues(subs(n=n,r)))) assuming n::integer;
```

$$\begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{(\sqrt{5}-2)^{n+1}(\sqrt{5}+2)\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)}{n} & \textit{otherwise} \end{cases}$$

II Opérateurs de récurrences

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$
$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4 + x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4 + S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Série de Taylor ($f := \sum c_n x^n$)

$$xf = \sum c_n x^{n+1} = \sum c_{n-1} x^n,$$

$$f' = \sum n c_n x^{n-1} = \sum (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$

$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$

$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$

$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$

$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$
$$T_n'(x) = \frac{n\left(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)\right)}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$
$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)}{2},$$
$$T_n'(x) = \frac{n(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$x \mapsto X := \frac{S+S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S-(n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1}-S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$
$$T_n'(x) = \frac{n\left(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)\right)}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$

$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Morphisme d'anneaux d'opérateurs

Base monomiale $x^n = M_n(x)$

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x),$$
$$(M_n(x))' = nM_{n-1}(x).$$

Série de Tchebychev

$$xT_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2},$$
$$T_n'(x) = \frac{n\left(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)\right)}{2(1-x^2)}.$$

$$x \mapsto X := S^{-1},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := (n+1)S.$$

Pour tout u_n, $S \cdot u_n = u_{n+1}$.

$$x \mapsto X := \frac{S + S^{-1}}{2},$$
$$\frac{d}{dx} \mapsto D := \frac{(n+1)S - (n-1)S^{-1}}{2(1-X^2)} = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$(4+x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 2x\frac{d}{dx}$$
$$\mapsto (4+S^{-2})(n+1)(n+2)S^2 + 2S^{-1}(n+1)S$$
$$= (n+1)\left(4(n+2)S^2 + n\right)$$
$$4(n+2)c_{n+2} + nc_n = 0$$

$$\frac{(n-1)(n+1)\left((n+2)S^2 + 18n + (n-2)S^{-2}\right)}{\left((n-1)S^2 - 2n + (n+1)S^{-2}\right)},$$
$$(n+2)t_{n+2} + 18nt_n + (n-2)t_{n-2} = 0.$$

Fractions d'opérateurs de récurrence (Ore 1933)

Opérateurs de récurrence

On représente un opérateur P de récurrence en S et n, par: $P = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)S^i$, avec la commutation $Sn = (n+1)S$.
L'anneau des opérateurs de récurrence est euclidien.

Corps des fractions de récurrence

Cette anneau possède un corps des fractions avec l'égalité:

$$B^{-1}A = \frac{A}{B} = \frac{UA}{UB}.$$

Par l'algorithme d'Euclide étendue, on peut construire un ppcm_g (à gauche) P entre B et D ($P = UB = VD$).

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{UA}{UB} + \frac{VC}{VD} = \frac{UA + VC}{P},$$

$$\frac{D}{C} \cdot \frac{A}{B} = \frac{VD}{VC} \cdot \frac{UA}{UB} = \frac{P}{VC} \cdot \frac{UA}{P} = \frac{UA}{VC}.$$

On peut réduire la fraction $\frac{A}{B}$ de manière **irréductible** tel que $\mathrm{pgcd}_g(A, B) = 1$

III Calcul de la récurrence de Tchebychev

Mon interprétation des stratégies existantes

Algorithmes du calcul des récurrences

Entrée : $\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i$ $X := \frac{S+S^{-1}}{2}$, $D^{-1} = \frac{S^{-1}-S}{2n}$.

Sortie : $L := \sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i = \frac{D^{-k} \sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i}{D^{-k}} = \frac{A}{B}$ où $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$.

Paszkowski (1975)
Calcul $D^{-k} \sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i$.

Calculer les $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

$$\leftrightarrow \frac{\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X)}{D^{-k}}.$$

Lewanowicz (1976)
Calcul de A

Calculer les $p_i(X)$. Calculer la fraction de récurrence

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i.$$

Renvoyer le numérateur irréductible.

Rebillard (1998)
Calcul $D^{-k} \sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i$

$$X_k := D^{-k} X D^k.$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(X) D^i = \frac{\sum_{i=0}^{k} p_i(X_k) D^{-k+i}}{D^{-k}}.$$

Mon nouvel algorithme

Paszkowski + Diviser pour régner

Étape 1: Calcul des $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

Étape 2 : Diviser pour regner

$$\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X)$$

$$= D^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} D^{-\frac{k}{2}+i} q_i(X) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} D^{-k+i} q_i(X).$$

Théorème (Benoit 2008)

Si l'entrée est une équation différentielle linéaire d'ordre k et dont les polynômes sont de degrés d.

- La complexité arithmétique des algorithmes de Paszkowski, Lewanowicz et Rebillard est de $O(dk^3)$ opérations.
- La complexité arithmétique du nouvel algorithme est de $O((d+k)^\omega)$ opérations.

Si $k = d$, la complexité des algorithmes existants est de $O(k^4)$ opérations arithmétiques. La complexité du nouvel algorithme est de $O(k^\omega)$ opérations, avec $2 \leq \omega \leq 3$.

Mon nouvel algorithme

Paszkowski + Diviser pour régner

Étape 1: Calcul des $q_i(x)$ tel que

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{d}{dx}\right)^i q_i(x).$$

Étape 2 : Diviser pour regner

$$\sum_{i=0}^{k} D^{-k+i} q_i(X)$$

$$= D^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} D^{-\frac{k}{2}+i} q_i(X) + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} D^{-k+i} q_i(X).$$

Théorème (Benoit 2008)

Si l'entrée est une équation différentielle linéaire d'ordre k et dont les polynômes sont de degrés d.

- La complexité arithmétique des algorithmes de Paszkowski, Lewanowicz et Rebillard est de $O(dk^3)$ opérations.
- La complexité arithmétique du nouvel algorithme est de $O((d+k)^\omega)$ opérations.

Preuve Soit $C(k,d)$, le coût pour calculer l'opérateur de récurrence de Tchebychev. On a l'égalité $C(k,d) = 2C(\frac{k}{2}, d) + O((k+d)^\omega)$. Ce qui donne $C(k,d) = O((k+d)^\omega)$. $\square$

IV Minimalité

Minimalité

Theorème (Lewanowicz)

L'algorithme de Paszkowski renvoie l'opérateur de récurrence d'ordre minimal si et seulement si $\mathrm{pgcd}\left((1-x^2), p_k(x)\right) = 1,.$

$$D = \frac{2n}{S^{-1} - S}.$$

$$1 - X^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}S^{-2}\right) = \frac{1}{4}(S^{-1} - S)^2.$$

Example $(x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + 1 + x)$

```
> LewanowiczOre(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x,[x,D],t(n));
```

$$-n\,t(n) - 2\,t(n+2) + (n+4)\,t(n+4) + \left(7\,n + n^2 + 11\right)t(n+3) + \left(n^2 - 1 + n\right)t(n+1) = 0$$

```
> Paszkowski(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x,[x,D],t(n));
```

$$\left(-5\,n - n^2\right)t(n) + \left(15 - 6\,n^2 - 4\,n - n^3\right)t(n+3) + \left(6 + 2\,n^2 + 10\,n\right)t(n+2) + (6\,n+24)\,t(n+4) + \left(18\,n^2 + 100\,n + 165 + n^3\right)t(n+7) + \left(n^2 + 11\,n + 24\right)t(n+8) + \left(n^3 + 4\,n - 5 + 6\,n^2\right)t(n+1) + \left(-22\,n - 2\,n^2 - 54\right)t(n+6) + \left(-n^3 - 100\,n - 175 - 18\,n^2\right)t(n+5) = 0$$

Mon algorithme rapide et minimal

Rec Min

Entrée $(q_1 \dots q_k)$
Sortie La récurrence de Tchebychev

- Si $\mathrm{pgcd}_g(q_i, D) = 1$
  Renvoyer Paszkowskibinaire$(q_1 \dots q_k)$
- Sinon
  $q_{k-1} := \frac{q_k}{D} + q_{k-1}$
  $k := k - 1$
  Renvoyer Rec Min$(q_1 \dots q_k)$.

Example $(x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + 1 + x)$

```
> LewanowiczOre(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x,[x,D],t(n));
```

$$-n\,t(n) - 2\,t(n+2) + (n+4)\,t(n+4) + \left(7\,n + n^2 + 11\right) t(n+3) + \left(n^2 - 1 + n\right) t(n+1) = 0$$

```
> Paszkowskibinaire(x*(1-x^2)*D^2-(1+2*x-2*x^3)*D+1+x,[x,D],t(n));
```

$$-n\,t(n) - 2\,t(n+2) + (n+4)\,t(n+4) + \left(7\,n + n^2 + 11\right) t(n+3) + \left(n^2 - 1 + n\right) t(n+1) = 0$$

V Conclusion

Contributions

- Utilisation de **fractions d'opérateurs de récurrences**: clarification et simplification des algorithmes et des preuves existantes.
- Construction d'un opérateur de récurrence de Tchebychev en $O\left((k+d)^{\omega}\right)$ opérations arithmétiques ($2 \leq \omega \leq 3$).
- Algorithme hybride efficace pour calculer l'opérateur de récurrence d'ordre minimal.
- Code Maple (700 lignes).

Perspectives

- Calcul des premiers coefficients de la séries de Tchebychev.
- Calcul des récurrences dans d'autres bases de fonctions (les polynômes de Jacobi, Legendre, Laguerre et les fonctions de Bessel).
- Intégration du code dans le Dynamic Dictionary of Mathematical Functions au centre de recherche commun Inria-Microsoft Research.