

Variétés polaires et bipolaires

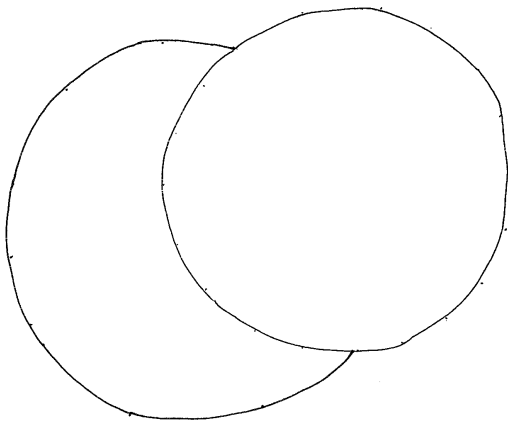
Marc Giusti

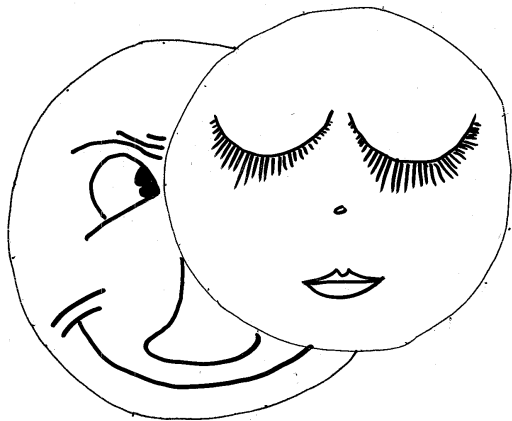
Laboratoire d'Informatique de l'X
CNRS-Polytechnique

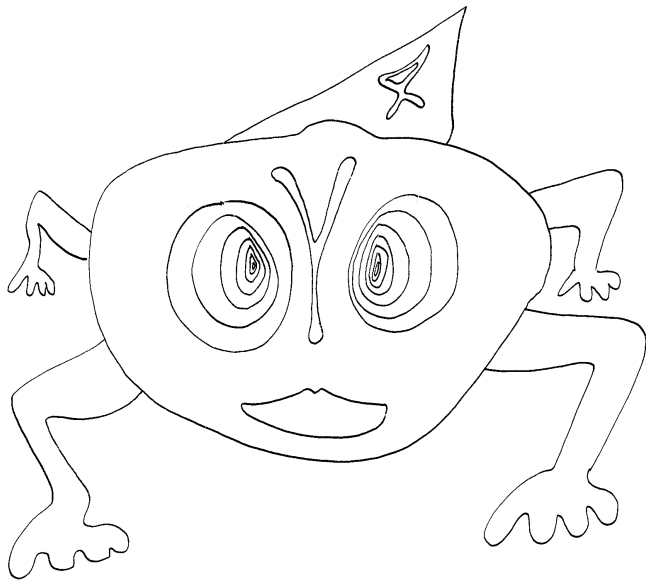
Travail en commun avec

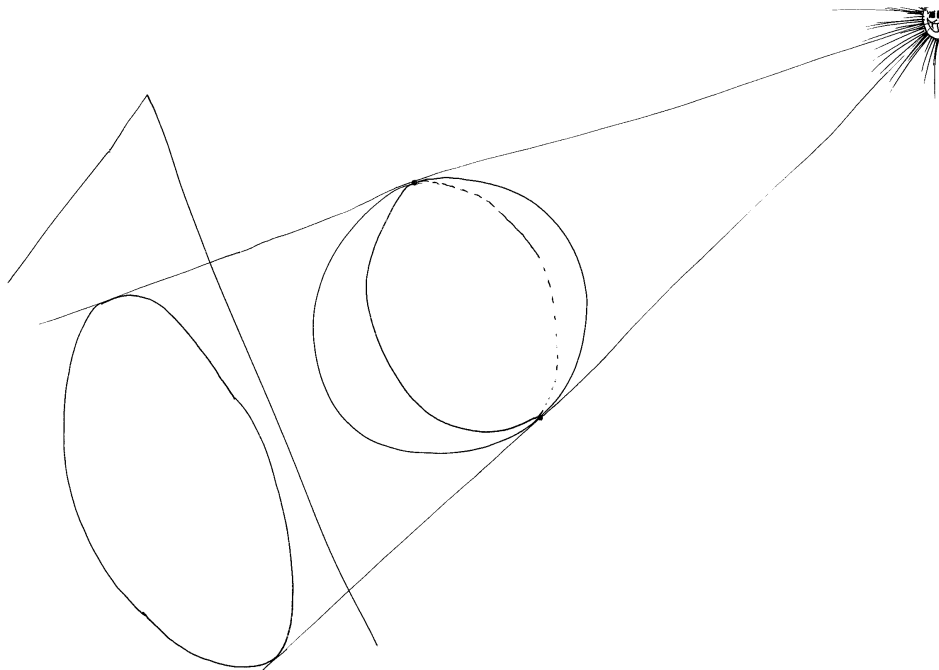
B. Bank (Humboldt-Universität zu Berlin)
J. Heintz (Universidades de Buenos Aires y Cantabria)
G. Mbakop (Humboldt-Universität zu Berlin)
L. M. Pardo (Universidad de Cantabria)

Journées Nationales de Calcul Formel

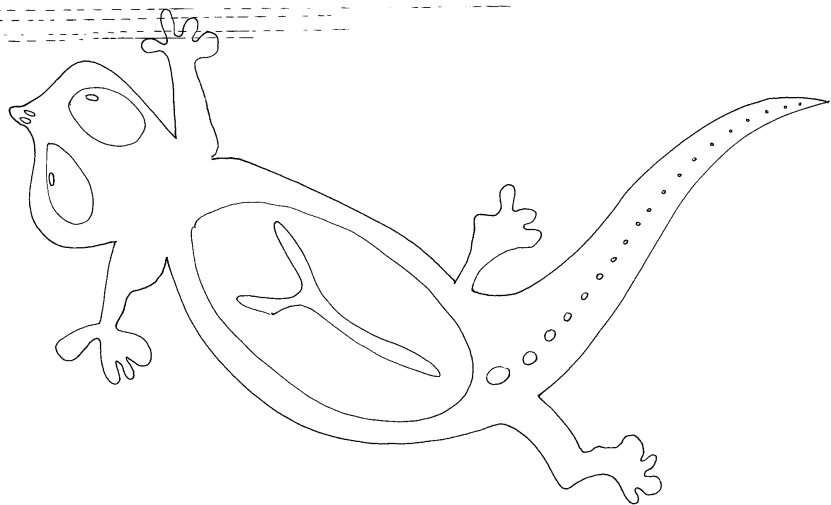








Une courbe algébrique



- Les **variétés polaires** sont des objets provenant de la géométrie algébrique classique. Elles constituent un outil de choix afin de concevoir en géométrie réelle des algorithmes avec une complexité **intrinsèque**.
- En particulier, trouver efficacement un **point représentatif** par composante connexe d'une variété algébrique réelle représente un problème de base. Nous le traitons en exploitant la **résolution géométrique** des variétés polaires **génériques** ou **suffisamment génériques** (algorithme **KRONECKER**).
- Diverses généralisations de la notion de variété polaire permettant de s'affranchir successivement des hypothèses **d'hypersurface, de compacité et de lissité**.

Pour un indice i fixé entre 1 et $n - 1$, soit A_i une $((n - i) \times n)$ -matrice générique.

$$A = A_i := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-i,1} & a_{n-i,2} & \cdots & a_{n-i,n} \end{bmatrix},$$

- $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$
- $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(f) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0\}$
- $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ sa trace réelle $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$

La i^e variété polaire (ouverte) de \mathcal{V}

est définie par

$$\Delta_i(A) := \{x \in \mathcal{V} \setminus \text{Sing } \mathcal{V} \mid T_x \mathcal{V} \text{ non transverse à } \ker A_i\}.$$

$\implies \Delta_i(A)$ est l'ensemble des points de \mathcal{V} ,
où la $((1+n-i) \times n)$ -matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ & & A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(f)(x) \\ A_i \end{bmatrix}$$

n'est pas de rang maximal, c.a.d. de rang strictement inférieur à $n - i$.

La i^{e} variété polaire (ouverte) de \mathcal{V}

est définie par

$$\Delta_i(A) := \{x \in \mathcal{V} \setminus \text{Sing } \mathcal{V} \mid T_x \mathcal{V} \text{ non transverse à } \ker A_i\}.$$

$\implies \Delta_i(A)$ est l'ensemble des points de \mathcal{V} ,
où la $((1+n-i) \times n)$ -matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ & & A_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(f)(x) \\ A_i \end{bmatrix}$$

n'est pas de rang maximal, c.a.d. de rang strictement inférieur à $n-i$.

La i^{e} variété polaire (fermée) de \mathcal{V}

est définie comme la clôture de Zariski de la variété polaire ouverte.

- Si l'hypersurface $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ est lisse, nous obtenons des équations de la trace réelle de la variété polaire en adjoignant à $f = 0$ les mineurs maximaux de la matrice $\begin{bmatrix} J(f)(x) \\ A_i \end{bmatrix}$.
- La codimension attendue de la i^{e} -variété polaire est i

$$n - (1 + n - i) + 1 = i$$

- Les variétés polaires s'organisent en une suite décroissante de sous-variétés "feuilletant" \mathcal{V} en codimension $1, \dots, n - 1$, correspondant au drapeau $\ker A_{n-1}, \dots, \ker A_1$.

- Fin de la décennie 1980–90 ... début de la suivante contributions historiques de [G–Heintz], [G–Heintz–Pardo et al.], ... [Krick–Pardo]
- Description des algorithmes [G–Lecerf–Salvy], [Durvyé–Lecerf], [Durvyé '08], [Heintz–Krick–Puddu–Sabia–Waissbein]
- Implantation [Lecerf], Lehmann, Schost: **KRONECKER**
- **TERA** group
Aldaz, Bank, Beltran, Bostan, Cafure, Castaño, Castro, Dickenstein, Durvyé, Fitchas, G, Grimson, Hägele, Heintz, Jeronimo, Krick, Lecerf, Lehmann, Llovet, Mandel, Marchand, Matera, M'bakop, Montaña, Morais, Morgenstern, Pardo, Puddu, Sabia, Salvy, Schost, Sedoglavic, Sessa, Smietanski, Solernó, Turull, Wachenchauer, Waissbein, ...

- $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$
- $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(f) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0\}$
- $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ sa trace réelle $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$
- L'équation f est supposée régulière : $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ est non vide et $\text{grad}(f)$ ne s'annule sur aucune des ses composantes connexes.
- Degré de $f \leq d$

EXHIBER UN POINT PAR COMPOSANTE CONNEXE DE $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$

- Grigoriev, Grigoriev/Vorobjov '87, '88
- Complexité $d^{O(n)}$:
 - Heintz/Roy/Solerno '89, '90
 - Barvinok '91
 - Renegar '92, '98
 - Canny/Emiris, Canny '95, '98
 - Blum/Cucker/Shub/Smale '97
 - Cucker/Smale '98
 - Basu/Pollack/Roy '95, '98
- Articles plus récents:
 - Rouillier/Roy/Safey el Din '00
 - Aubry/Rouillier/Safey el Din '02
 - Safey el Din/Schost, Safey el Din '03, '04, '05, '08
 - ...
- Nos contributions '97, '98, '00, '02, '05, '07, '08

Variétés polaires : quantification de la complexité des données

- $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ équation régulière de l'hypersurface réelle **lisse**

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \text{ compacte ou non}$$

- Degré de $f \leq d$
- Complexité d'évaluation de $f \leq L$
- Degré maximal des variétés polaires δ majoré supérieurement par le nombre de **Bézout** d^n .

(Si $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ est non compacte nous utilisons des variétés polaires *généralisées*.)

- **Complexité intrinsèque** (nombre d'opérations arithmétiques dans \mathbb{Q})

$$L(nd\delta)^{O(1)}$$

- Théorème d'existence
- Version probabiliste
- **Complexité extrinsèque :**

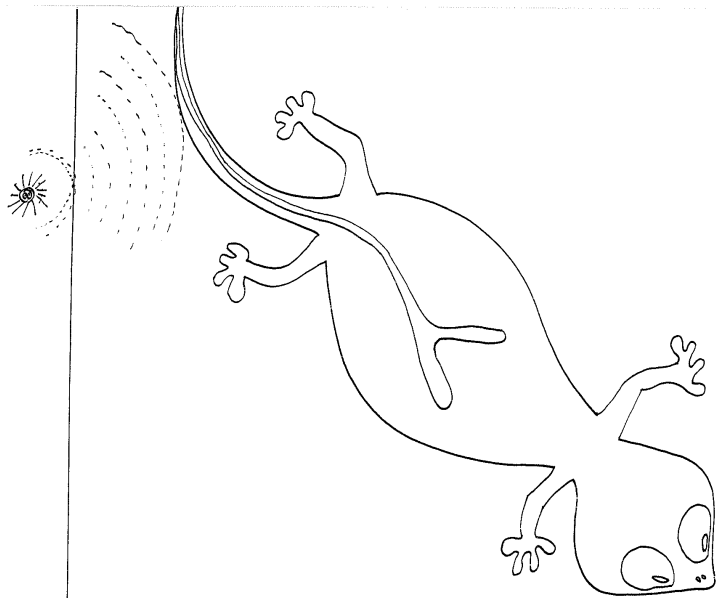
Linéaire en L

Polynomiale en le nombre de Bézout d^n

Nous retrouvons les meilleures complexités extrinsèques connues

- Lower bounds and optimality considerations [Heintz–Morgenstern], [Heintz–Matera–Pardo–Wachenchauzer], [G–Heintz], [Castro–G–Heintz–Matera–Pardo]).

Une courbe algébrique non compacte



Il nous faut un espace de paramètres plus gros ; le produit de :

- Variété de drapeaux ;
- Variété des hyperquadriques ;
- Variété des hyperplans

Les variétés polaires **généralisées** couvrent la technologie **RADAR** !
Ce gros espace de paramètres permet même de connecter toutes les technologies connues :

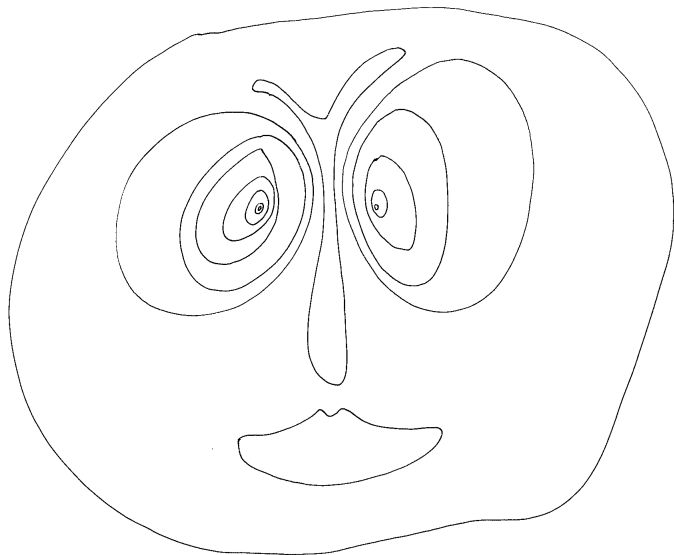
- lancer de rayons de variétés linéaires à distance infinie ou finie
- projections – orthogonales ou obliques – de sous-variétés linéaires, etc ...)

Toujours la **même classe de COMPLEXITÉ** !

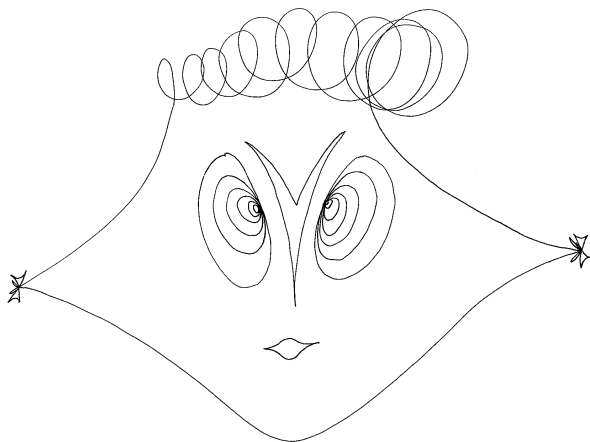
- f_1, \dots, f_p suite régulière réduite
- $\mathcal{V} := \{f_1 = \dots = f_p = 0\}$
- Discussion sur le caractère intrinsèque de la complexité
- Préparation du système f_1, \dots, f_p par résolution géométrique, avant introduction de mineurs privilégiés

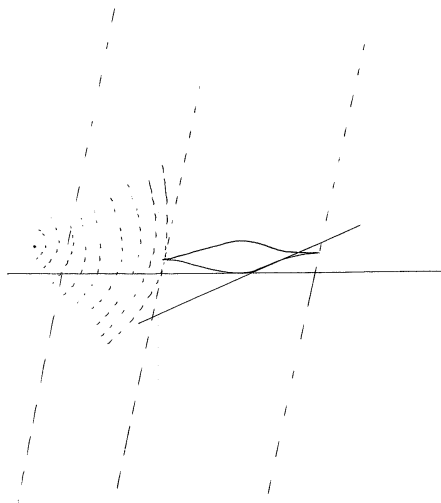
À un facteur combinatoire près, nous obtenons la **même complexité**.

Encore la vieille courbe algébrique!



Une nouvelle fraîche!!





$$f(x, y, z) := z^2 - \varepsilon^2(x^2 + y^2 - 1)^3 = 0, \quad \varepsilon > 0 \text{ petit}$$



Variétés polaires

- Les variétés polaires (ouvertes) génériques ne sont plus toujours non vides.
- Les variétés polaires (fermées) ne bougent plus librement quand les directions définies par A changent, car elles contiennent des parties fixes (contenues dans le lieu singulier). Et nous n'en avons plus d'équations!
- La variété déterminantielle définie précédemment par l'annulation des mineurs maximaux peut se révéler trop grosse, car elle contient **TOUT** le lieu singulier.

LISSIFICATION CONTRE DÉSINGULARISATION

Désingularisation canonique des variétés déterminantielles – à la ROOM-KEMPF –

- Fixons un indice i entre 1 et $n - 1$, et considérons le système linéaire

$$J(f)(x)^T \lambda + A^T \mu = 0$$

- x dans \mathcal{V} et (λ, μ) dans $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-i}$.

L'espace de paramètres E_i

$$E = E_i := \{(A, \lambda, \mu) \in \mathbb{A}^{n(n-i)} \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-i} \mid \text{rang } A_i = n - i, \mu \neq 0\}$$

L'espace de paramètres E_i

$$E = E_i := \{(A, \lambda, \mu) \in \mathbb{A}^{n(n-i)} \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-i} \mid \text{rang } A_i = n - i, \mu \neq 0\}$$

Action de groupe sur E_i

Sur E agit naturellement à droite le groupe $G := Gl(n - i) \times Gl(1)$.

Soit $g := (B, t) \in G$ et $e := (A, \lambda, \mu) \in E$.

$$E \times G \rightarrow E, \quad (e, g) \mapsto e \cdot g := (B^T \cdot A, t\lambda, tB^{-1} \cdot \mu).$$

L'espace de paramètres E_i

$$E = E_i := \{(A, \lambda, \mu) \in \mathbb{A}^{n(n-i)} \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{n-i} \mid \text{rang } A_i = n - i, \mu \neq 0\}$$

Action de groupe sur E_i

Sur E agit naturellement à droite le groupe $G := Gl(n - i) \times Gl(1)$.
Soit $g := (B, t) \in G$ et $e := (A, \lambda, \mu) \in E$.

$$E \times G \rightarrow E, \quad (e, g) \mapsto e \cdot g := (B^T \cdot A, t\lambda, tB^{-1} \cdot \mu).$$

Espace quotient

G induit sur E_i une relation d'équivalence \sim .
Nous notons E/\sim l'ensemble des G -orbites.

- Le quotient catégoriel E_i / \sim est un quotient géométrique, c.a.d. possède une structure de variété algébrique (car G est un "bon" groupe.
- Ce quotient est fermé

- Le quotient catégoriel E_i / \sim est un quotient géométrique, c.a.d. possède une structure de variété algébrique (car G est un "bon" groupe.
- Ce quotient est fermé
- C'est même une variété différentiable. Les points (A, λ, μ) d'une carte typique sont de la forme

$$A = [I_{n-i} \tilde{A}], \quad \mu = (1, \tilde{\mu}),$$

où I_{n-i} est la matrice identité d'ordre $n - i$, \tilde{A} une $(i \times (n - i))$ -matrice, et $\tilde{\mu} := (\mu_2, \dots, \mu_{n-i})$.

- Considérons pour un point x fixé dans \mathcal{V} le sous-ensemble de E_i défini par

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{1,k} \mu_k = 0,$$

(1)

⋮

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{n,k} \mu_k = 0,$$

- Considérons pour un point x fixé dans \mathcal{V} le sous-ensemble de E_i défini par

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{1,k} \mu_k = 0,$$

$$(1) \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{n,k} \mu_k = 0,$$

- Il est invariant sous G .

- Considérons pour un point x fixé dans \mathcal{V} le sous-ensemble de E_i défini par

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{1,k} \mu_k = 0,$$

(1)

\vdots

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \sum_{k=1}^{n-i} a_{n,k} \mu_k = 0,$$

- Il est invariant sous G .
- Nous pouvons donc considérer le sous-ensemble S_i de $\mathbb{A}^n \times E_i/\sim$ défini par le même système (1).

C'est un **fermé** !

Les variétés bipolaires

- L'image de S_i par la projection canonique

$$S_i \subset \mathbb{A}^n \times E_i / \sim \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

se projette surjectivement sur l'ouvert de lissité $\mathcal{V} \setminus \text{Sing}\mathcal{V}$
(rappelons: $\mathcal{V} := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\}$).

Les variétés bipolaires

- L'image de S_i par la projection canonique

$$S_i \subset \mathbb{A}^n \times E_i / \sim \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

se projette surjectivement sur l'ouvert de lissité $\mathcal{V} \setminus \text{Sing}\mathcal{V}$
(rappelons: $\mathcal{V} := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\}$).

- S_i est une variété intersection complète lisse (non compacte dès que $\text{Sing}\mathcal{V}$ est non vide).

Nous nous empressons de considérer ses variétés polaires
(*généralisées*). Suffisamment génériques, elles constituent les
variétés **bipolaires** de \mathcal{V} .

Dans une carte typique S_i est définie par:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + 1 &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) + \mu_l &= 0, \quad 2 \leq l \leq n - i \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_l}(x) + a_{1,l} + \sum_{k=2}^{n-i} \mu_k \tilde{a}_{k,l} &= 0, \quad n - i + 1 \leq l \leq n.\end{aligned}$$

En un point non singulier de \mathcal{V} , l'analyse de la matrice Jacobienne correspondante aboutit à

- Elle est de rang maximal ;
- Nous pouvons décrire les variétés bipolaires par autant d'équations que leur codimension (intersection complète) ;
- L'application du théorème de transversalité faible de Thom redonne des fibres lisses.

- Les bipolaires s'organisent par codimension décroissante j en des suites strictement ascendantes :

$$B_{i,D_i} \subset \cdots \subset B_{i,j} \subset \cdots \subset B_{i,1} \subset B_{i,0} = S_i$$

- Laisant courir aussi l'indice i de $n - 1$ à 1 , nous obtenons un réseau bidimensionnel de variétés bipolaires
- Une **marche** dans ce réseau consiste en un chemin de longueur au plus n , partant d'une variété bipolaire de dimension zéro $B_{i_1,D_{i_1}}$ et aboutissant à une variété d'orbite $B_{i_2,0} = S_{i_2}$
- À chaque pas, l'indice i ou la codimension j décroissent
- Les variétés bipolaires rencontrées au cours de la marche, modulo des sections et des identifications appropriées, forment une suite ascendante au cours de laquelle la dimension augmente exactement de un. Il est important de noter que leur traces réelles ne sont pas vides, donc denses.

- Parcourir une marche à l'envers nous fournit une stratégie algorithmique, qui dès qu'elle trouve des points réguliers et réels sur les bipolaires, s'empresse de les projeter sur des points réels lisses de V ;
- En **bonus** nous obtenons les choix adéquats des matrices A favorables à notre dessein ;
- Nous retrouvons le traitement du cas lisse par une marche particulière.

Théorème. Soit $f(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme de degré $d \geq 2$ définissant comme ci-dessus des hypersurfaces complexes et réelles V and $V_{\mathbb{R}}$. Supposons que f soit donné par un calcul d'évaluation direct de taille L . Chaque marche \mathcal{W} donne naissance à une procédure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ qui exhibe au moins un point algébrique réel par composante connexe de $V_{\mathbb{R}}$. Sa complexité en temps séquentiel est linéaire en L et polynomial en d, n et une quantité géométrique appropriée $\delta_{\mathcal{W}}$. Cette quantité est le maximum des degrés des variétés bipolaires de V rencontrées au cours de la marche. C'est donc un invariant intrinsèque de V et \mathcal{W} , qui borne également le nombre et le degré algébrique des points représentatifs exhibés par $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$.

- Qui plus est, du point de vue déstructuré et extrinsèque, $\delta_{\mathcal{W}}$ et la complexité de la procédure $\mathcal{R}_{\mathcal{W}}$ sont dans le pire des cas d'ordre $d^{O(n)}$, ce qui retrouve sans surprise les bornes antérieurement connues ;
- Puisqu'en effet d'après les travaux [G.–Heintz 2001] et [Castro–G.–Heintz–Matera–Pardo 2003], nous savons que cet ordre de grandeur constitue une borne inférieure de complexité, qui ne peut être améliorée que par des considérations de complexité intrinsèque, comme ici où $\delta_{\mathcal{W}}$ peut être bien plus petit ;
- Et ce d'autant plus que le lieu singulier est **GROS** !
- Généralisation en codimension supérieure ; pas de problème hormis la réflexion sur la complexité intrinsèque.

Table de calculs utilisant MAGMA 2.13

Équations polynomiales provenant de la construction de filtres basés sur des ondelettes

δ	δ^*	ktime	kmem	gtime	gmem
12	6	1.5 s	3 MB	1.2 s	1 MB
12	8	7 s	3 MB	0.3 s	6 MB
54	22	1 m 20 s	7 MB	3 m 10s	38 MB
28	10	16 s	9 MB	6.5s	9 MB
28	10	60 s	10 MB	15 s	10 MB
136	24	30 m	50 MB	> 5 h	> 800 MB
136	26	1h 5 m	75 MB	> 5 h	> 300 MB
32	6	17 s	7 MB	2 m 30 s	17 MB
32	10	45 s	7 MB	67 s	21 MB
168	36	1h 40 m	98 MB	> 5 h	> 300 MB

δ : number of complex solutions k ... : Kronecker (Lecerf, Lehmann)
 δ^* : number of real solutions g ... : Gröbner (Steel, F4 Faugère)