Certificats de positivité et minimisation polynomiale dans la base de Bernstein multivariée

JNCF 2008

Marie-Françoise Roy & Richard Leroy
IRMAR

Vendredi 24 octobre 2008

But de l'exposé

Notations

But de l'exposé

Notations

- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ de degré d

But de l'exposé

Notations

- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ de degré d
- simplexe non dégénéré $V = \mathrm{Conv}\,[V_0, \ldots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$

But de l'exposé

Notations

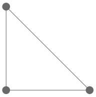
- $f \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ de degré d
- simplexe non dégénéré $V = \mathrm{Conv}\,[V_0, \ldots, V_k] \subset \mathbb{R}^k$
- coordonnées barycentriques λ_i $(i = 0, \ldots, k)$:
  - polynômes de degré 1
  - $\sum \lambda_i = 1$
  - $x \in V \Leftrightarrow \forall i,\ \lambda_i(x) \geq 0$

But de l'exposé

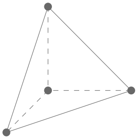
Exemple : le simplexe standard

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \forall i, x_i \geq 0 \text{ et } \sum x_i = 1\}$$

$$x \geq 0$$
$$1 - x \geq 0$$



$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$1 - x - y \geq 0$$



$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$1 - x - y - z \geq 0$$

But de l'exposé

Questions

But de l'exposé

Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?

But de l'exposé

Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?

But de l'exposé

Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?

$\hookrightarrow$ certificats de positivité

But de l'exposé

Questions

- Comment décider si f est positif sur V ou non ?
- Le cas échéant, comment obtenir une preuve simple de cette positivité ?

  $\hookrightarrow$ certificats de positivité
- Comment calculer le minimum de f sur V (et localiser les minimiseurs) ?

Plan de l'exposé

Polynômes de Bernstein

Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \dfrac{d!}{\alpha_0! \ldots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein

Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \dfrac{d!}{\alpha_0! \ldots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein de degré d associés à V

$$B_\alpha^d = \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \binom{d}{\alpha} {\lambda_0}^{\alpha_0} \ldots {\lambda_k}^{\alpha_k}.$$

Polynômes de Bernstein

Notations

- multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$
- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_k = d$
- coefficient multinomial $\binom{d}{\alpha} = \dfrac{d!}{\alpha_0! \dots \alpha_k!}$

Polynômes de Bernstein de degré d associés à V

$$B_\alpha^d = \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \binom{d}{\alpha} {\lambda_0}^{\alpha_0} \dots {\lambda_k}^{\alpha_k}.$$

Apparaissent naturellement dans le développement

$$1 = 1^d = (\lambda_0 + \cdots + \lambda_k)^d = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} \lambda^\alpha = \sum_{|\alpha|=d} B_\alpha^d.$$

Propriétés

Propriétés

- positifs sur V

Propriétés

- positifs sur V
- base de $\mathbb{R}_d[X]$

Propriétés

- positifs sur V
- base de $\mathbb{R}_d[X]$

$\hookrightarrow$ coefficients de Bernstein :

- Tout polynôme f de degré $\leq d$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha(f, d, V) B_\alpha^d.$$

- $b(f, d, V)$: liste des coefficients $b_\alpha = b_\alpha(f, d, V)$

Grille de contrôle

Grille de contrôle

- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \dfrac{\alpha_0 V_0 + \cdots + \alpha_k V_k}{d}$

Grille de contrôle

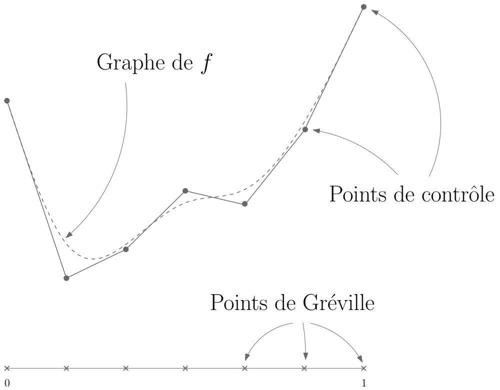
- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \dfrac{\alpha_0 V_0 + \cdots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)

Grille de contrôle

- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \dfrac{\alpha_0 V_0 + \cdots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)
- Graphe de f sur la grille de Gréville : points $(N_\alpha, f(N_\alpha))$

Grille de contrôle

- Grille de Gréville : points $N_\alpha = \dfrac{\alpha_0 V_0 + \cdots + \alpha_k V_k}{d}$
- Grille de contrôle : points (N_α, b_α)
- Graphe de f sur la grille de Gréville : points $(N_\alpha, f(N_\alpha))$



Propriétés d'interpolation

Propriétés d'interpolation

- Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f\left(N_\alpha\right)$$

Propriétés d'interpolation

- Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f\left(N_\alpha\right)$$

- Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f\left(V_i\right)$$

Propriétés d'interpolation

- Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f\left(N_\alpha\right)$$

- Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f\left(V_i\right)$$

- Et les autres coefficients dans le cas $d \geq 2$?

Propriétés d'interpolation

- Précision affine

$$\text{Si } d \leq 1 : b_\alpha = f\left(N_\alpha\right)$$

- Interpolation aux sommets

$$b_{de_i} = f\left(V_i\right)$$

- Et les autres coefficients dans le cas $d \geq 2$?

$$\hookrightarrow \text{mesurer l'écart entre } f\left(N_\alpha\right) \text{ et } b_\alpha$$

Ecart grille de contrôle / graphe de f

Théorème

L'écart entre la grille de contrôle et le graphe de f est majoré par

$$\frac{dk(k+2)}{24} \underbrace{\left\|\Delta^2 b(f,d,V)\right\|_\infty}.$$

$$\|$$

$$\max_{\substack{|\gamma| = d-2 \\ 0 \leq i < j \leq k}} \left| \underbrace{b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_i+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}}}_{\text{différences secondes}} \right|$$

Le cas le pire est atteint par une certaine forme quadratique, qui réalise la borne ci-dessus.

Certificats de positivité

Certificats de positivité

- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$

Certificats de positivité

- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
  Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ.

Certificats de positivité

- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
  Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ.
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ.

Certificats de positivité

- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
  Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ.
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ.

- Attention : Réciproque fausse !

Certificats de positivité

- Hypothèse de positivité : $m = \min_{\Delta} f > 0$
- Certificat de positivité :
  Identité algébrique prouvant que f est positif sur Δ.
- Ici :

Certificat de positivité dans la base de Bernstein

Si $b(f, d, V) > 0$, alors $f > 0$ sur Δ.

- Attention : Réciproque fausse !
  - $f = 6x^2 - 6x + 2 > 0$ sur $[0, 1]$, mais
    $b(f, 2, [0, 1]) = [2, -1, 2]$.

2 Certificats de positivité

- Par élévation du degré
- Par subdivision

Certificats de positivité
par élévation du degré

Idée : Exprimer f dans les bases de Bernstein de degrés $D \geq d$ de plus en plus grands.

Si D est assez grand, alors tous les coefficients $b_\alpha(f, D, \Delta)$ sont > 0.

Théorème

$$D > \frac{d(d-1)k(k+2)}{24m} \left\| \Delta^2 b(f, d, \Delta) \right\|_\infty \Rightarrow b(f, D, \Delta) > 0.$$

2 Certificats de positivité

- Par élévation du degré
- Par subdivision

Certificats de positivité
par subdivision

Idée : Garder le degré d constant, et subdiviser le simplexe Δ. Si la subdivision est suffisamment fine, alors sur chaque sous-simplexe V^i, les coefficients $b_\alpha(f, d, V^i)$ sont > 0.

Outil : triangulations standard de degré 2 successives :

$$\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^{2^{kN}}.$$

Théorème

Si $2^N > \dfrac{\sqrt{d}k(k+2)\sqrt{k(k+1)(k+3)}}{24\sqrt{m}} \|\Delta^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$,

alors $b(f, D, V^i) > 0$ sur chaque V^i.

Certificats de positivité
par subdivision

Avantages :

Certificats de positivité
par subdivision

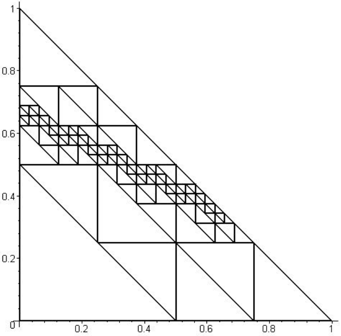
Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f

Certificats de positivité
par subdivision

Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f



Certificats de positivité
par subdivision

Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre

Certificats de positivité
par subdivision

Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre
- meilleure interpolation

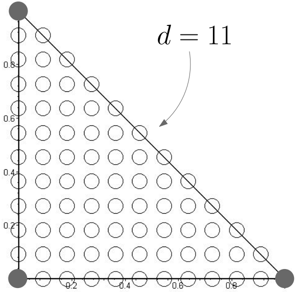
Certificats de positivité

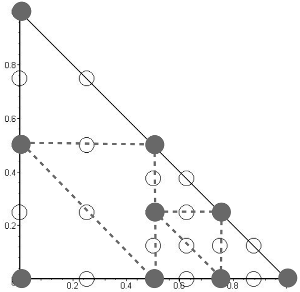
par subdivision

Avantages :

- le processus s'adapte à la géométrie du polynôme f
- taille des certificats de positivité moindre
- meilleure interpolation

$$f = (2 - 4X + 3Y)^2 + 1$$





Certificats de positivité
par subdivision

Le processus s'arrête :

Théorème

Il existe une constante (explicite) $m_{k,d,\tau} > 0$ telle que si $\deg(f) \leq d$ et la taille binaire des coefficients de f est majorée par τ, alors

$$f > m_{k,d,\tau} \text{ sur } \Delta.$$

Propriété d'encadrement

Soit m le minimum de f sur le simplexe standard Δ.

But : donner un encadrement aussi précis que l'on veut de m.

Propriété d'encadrement

Soit V un simplexe, et m_V le minimum de f sur V. Alors :

$$m_V \in [s_V, t_V],$$

où

$s_V = \min b_\alpha,$

$t_V = \min[f(N_\beta), \underbrace{b_{de_i}}_{=f(V_i)}, i = 0, \dots, k],$

β est tel que $b_\beta = s_V$.

Algorithme

Principe :

Algorithme

Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^s$.

Algorithme

Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand

Algorithme

Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i, on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Algorithme

Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i, on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Outil : triangulations standard de degré 2 successives.

Algorithme

Principe :

- On subdivise : $\Delta = V^1 \cup \cdots \cup V^s$.
- On élimine les simplexes sur lesquels f est trop grand
- On boucle jusqu'à ce que sur chaque simplexe V^i, on ait :

$$t_{V^i} - s_{V^i} < \varepsilon,$$

où ε est la précision recherchée.

Outil : triangulations standard de degré 2 successives.

Si $$\frac{dk^3(k+1)^2(k+2)(k+3)}{2^{2N}} \frac{\|\Delta^2 b(f,d,\Delta)\|_\infty}{576} < \varepsilon,$$

alors au plus N étapes de subdivision sont nécessaires.

Conclusion

Conclusion

Algorithmes

Conclusion

Algorithmes

- certifiés

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)
- Sage ?

Conclusion

Algorithmes

- certifiés
- complexité connue
- implantés

Travail futur

- meilleure complexité (comme en une variable)
- Mathemagix ?