Robustesse en calcul géométrique, pratiques industrielles et apport du calcul formel

André lieutier

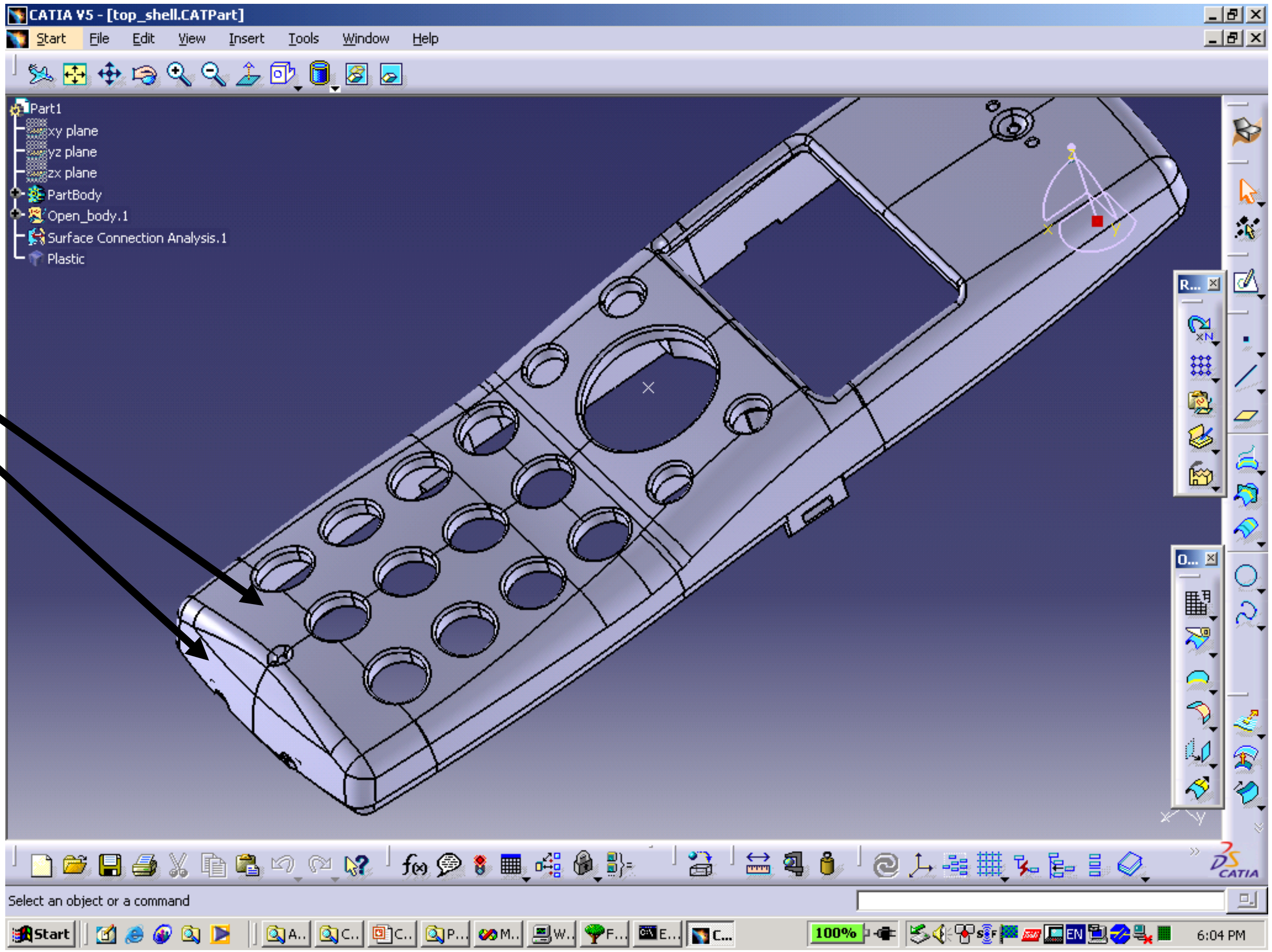
Dassault Systemes

Plan de la présentation

- Heuristique «epsilon programming » dans l’industrie
- Spécificité du calcul géométrique (versus analyse numérique)
- Paradigme du calcul exact
  - Succès (prédicats, filtres)
  - Limites : construction.
- Modèles de calcul pour une profondeur de calcul infinie
  - Dénombrable(exact) vs non dénombrable (approximations)
  - Type de donnée fini avec arrondis

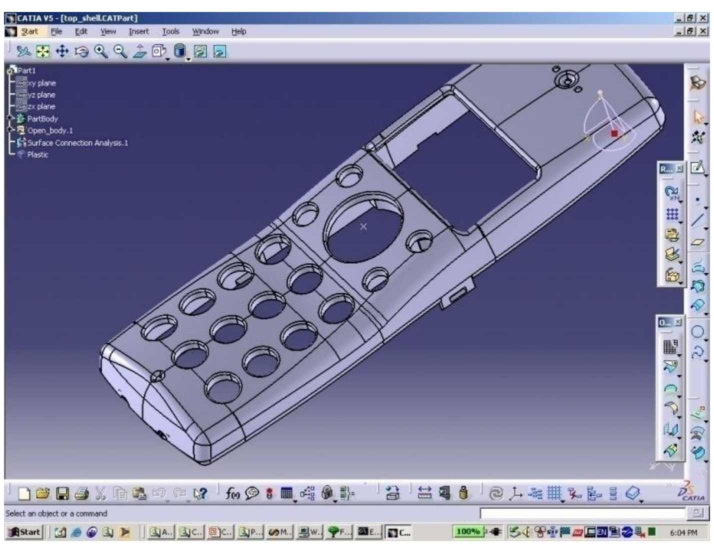
3-dimensional BRep

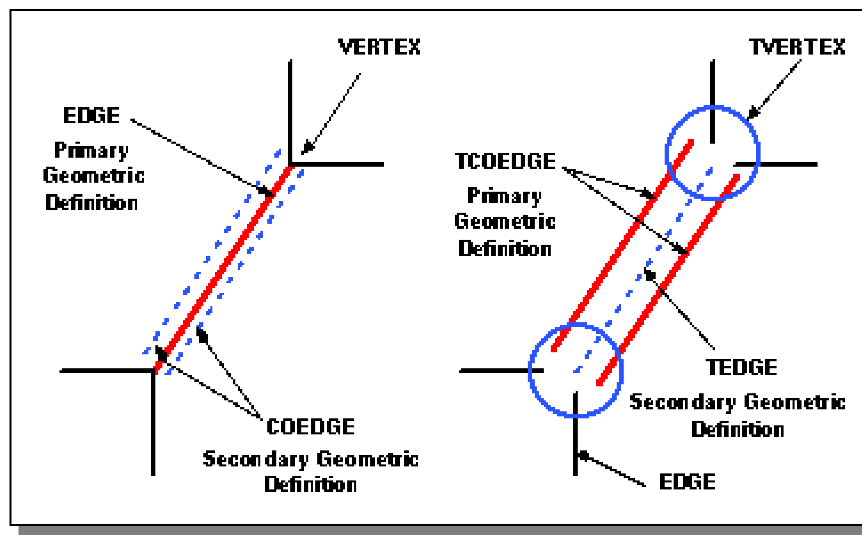
BRep 2D



Pratique du calcul géométrique dans l'industrie CAO

- B.Rep. pour « Boundary Représentation » cohérente a « epsilon prés »
- Les algorithmes utilisent les nombres a virgule flottantes
- Des « tolérances » sont calculées pour tenter d'assurer une cohérence aux tests d'égalité « a epsilon près » $|x-y| < \varepsilon$
- **Coût de maintenance ∞ (pas de spécification correcte)**





Un modèle pour l'analyse numérique

- La conception utilise un modèle de calcul real RAM
- L'implémentation utilise des nombres a virgule flottante
- Le test d'égalité **if x== y** est remplacé par le test **if | x-y | <** ε où ε est un majorant de l'incertitude sur l'évaluation de x-y

- C'est un modèle correct lorsque :
  - on contrôle le conditionnement,
  - les tests (**if**) sont sur les frontières du domaine de calcul. (exemple : pivot de Gauss)

Utilisé avec succès…

- …car les calculs en analyse numérique sont principalement continus
- Mais inadapté aux calculs discontinus

  Par calcul on entend la map Input $\longrightarrow$ Output

  Par continu on entend ici pour la topologie de R^n

Spécificités du calcul géométrique

Analyse numérique :

- Domaine de vol du calcul loin des discontinuités
- Cohérence combinatoire facile a gérer (exemple FEM phase solveur)
- Continuité (appelée parfois stabilité) par rapport aux représentations numériques (exemples: modèles FEM et espaces de Sobolev, cartes ..)

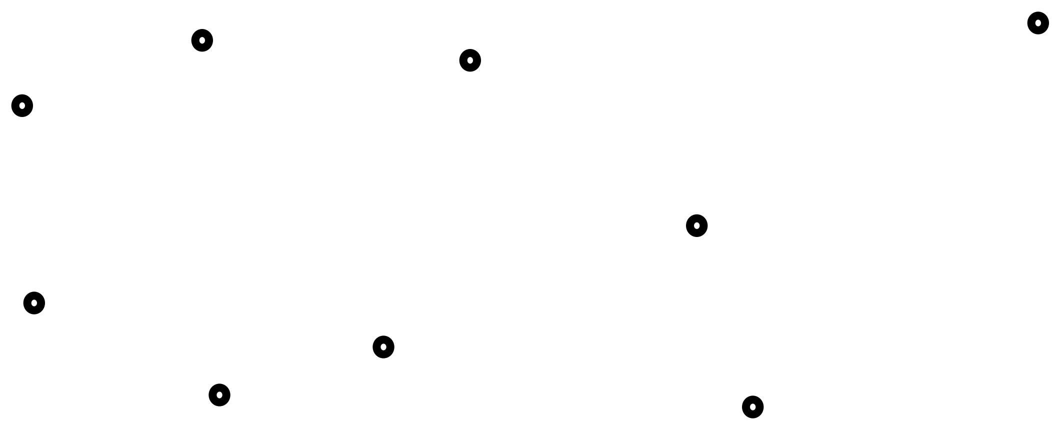
Géométrie :

- Discontinuités en plein cœur du domaine de vol,
- Imbrication forte des calculs numériques et combinatoires
  => cohérence complexe a gérer (exemple FEM phase maillage)
- Discontinuité par rapport aux représentations numériques

Spécificités du calcul géométrique

Discontinuités en plein cœur du domaine de vol

Triangulation de Delaunay



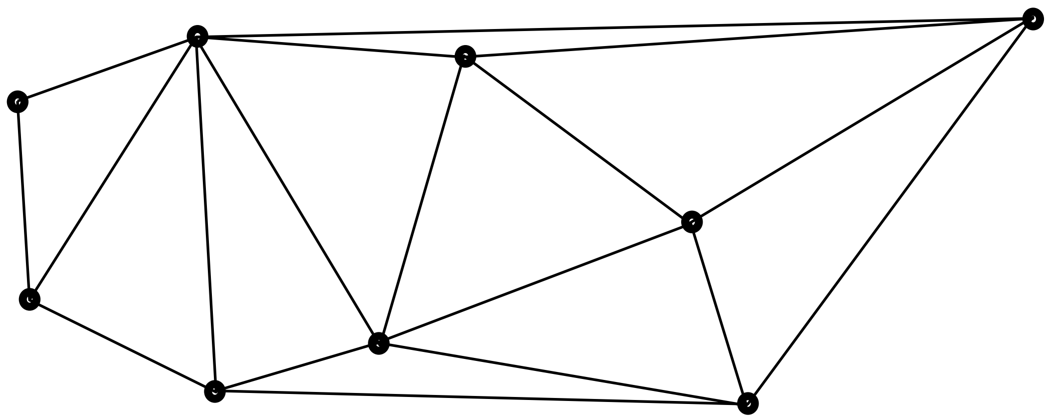
Numerical input: point coordinates

André Lieutier

Spécificités du calcul géométrique

Discontinuités en plein cœur du domaine de vol

Triangulation de Delaunay

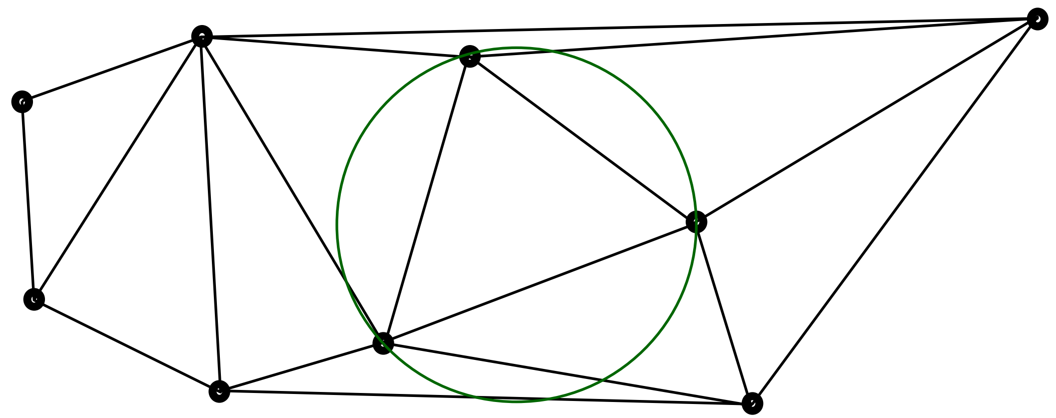


Numerical input: point coordinates
Combinatorial output: triangle connectivity

Spécificités du calcul géométrique

Discontinuités en plein cœur du domaine de vol

Triangulation de Delaunay

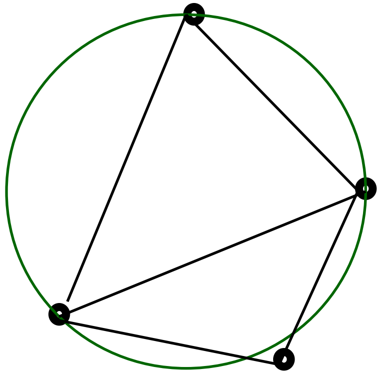


Empty circumscribing circle property

Spécificités du calcul géométrique

Discontinuités en plein cœur du domaine de vol

Triangulation de Delaunay

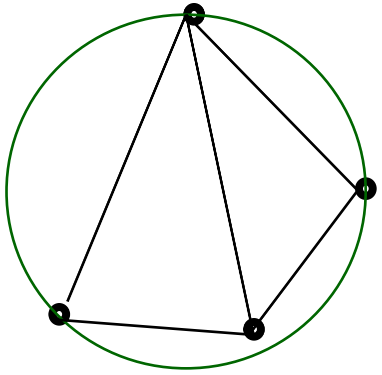


Empty circumscribing circle property

Spécificités du calcul géométrique

Discontinuités en plein cœur du domaine de vol

Triangulation de Delaunay

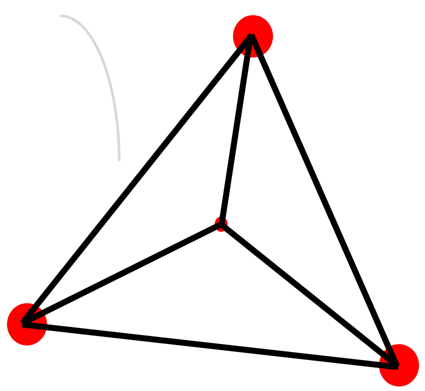


Empty circumscribing circle property

Spécificités du calcul géométrique

Imbrication forte des calculs numériques et combinatoires,
=> cohérence complexe a gérer

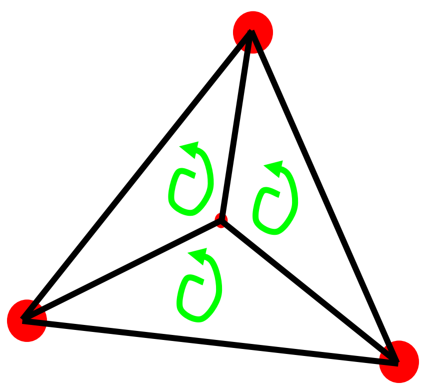
Triangulation de Delaunay



Spécificités du calcul géométrique

Imbrication forte des calculs numériques et combinatoires,
=> cohérence complexe a gérer

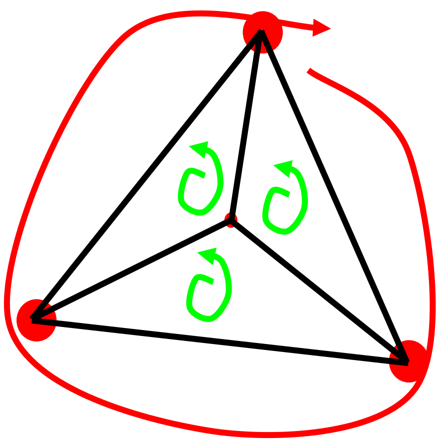
Triangulation de Delaunay



Spécificités du calcul géométrique

Imbrication forte des calculs numériques et combinatoires,
=> cohérence complexe a gérer

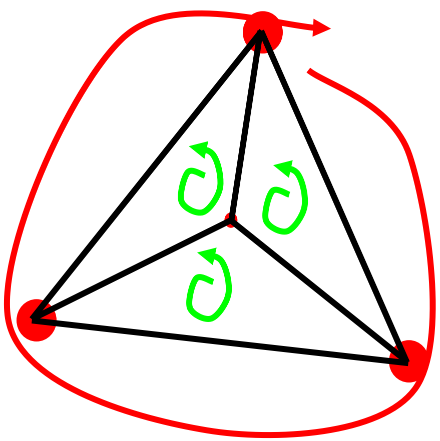
Triangulation de Delaunay



Spécificités du calcul géométrique

Imbrication forte des calculs numériques et combinatoires, => cohérence complexe a gérer (pas un problème de précision)

Triangulation de Delaunay



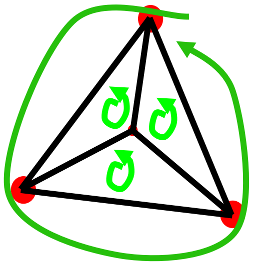
Evaluation en nombres a virgule flottante du signe du determinant,

⇓

orientation Incohérente !

Paradigme du calcul exact

- On se restreind a un anneau ou un corps dénombrable rationnels, nombres quadratiques ou algébriques, polynômes a coefficients rationnels (SOS)
- Les prédicats sont calculés exactement par évaluation du signe d'une expression sans arrondi donc cohérents



Cet approche se révèle indispensable pour résoudre les problèmes de cohérence
Elle est parfois source d'incompréhension réciproques (philosophie du modèle de calcul)

Autres approches pour la robustesse en géométrie

- Calcul utilisant une information géométrique partielle (incertaine): exemple enveloppe convexe de points donnés par des disques ou intervalles

- Choix de prédicats indépendants

- Rounding : comment préserver des propriétés (plongement, convexité,..) après un arrondi des coordonnées (alignement des points sur une grille).

Limites des prédicats exacts

Exemple : Booléen polyédrique : calcul d'union, intersection et différence sur des polyèdres

La réalisation d'opérations booléennes complètement robustes sur des polyèdres reste un problème ouvert et un tel composant serait de grande valeur pour l'industrie.

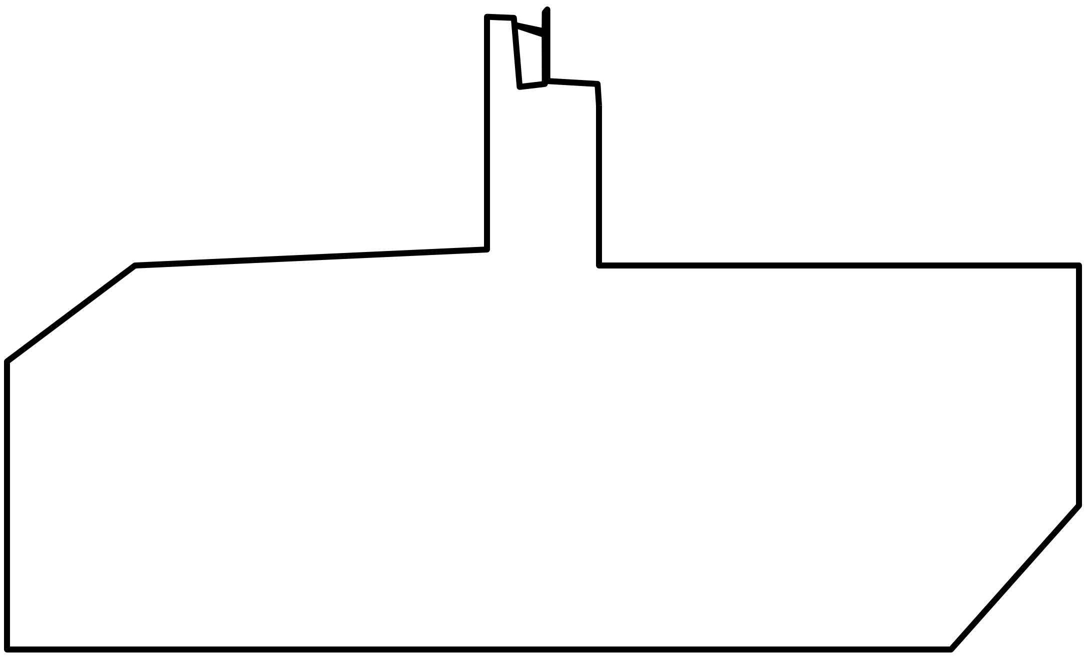
Il existe un tel composant dans CGAL basé sur une technologie de prédicats exacts (Nef Polyhedra) mais 2 problèmes:

- Les opérandes sont supposés bien plongés (pas d'auto-intersections)
- Les coordonnées input sont des flottants (ou entiers) et les coordonnées des outputs des nombres rationnels

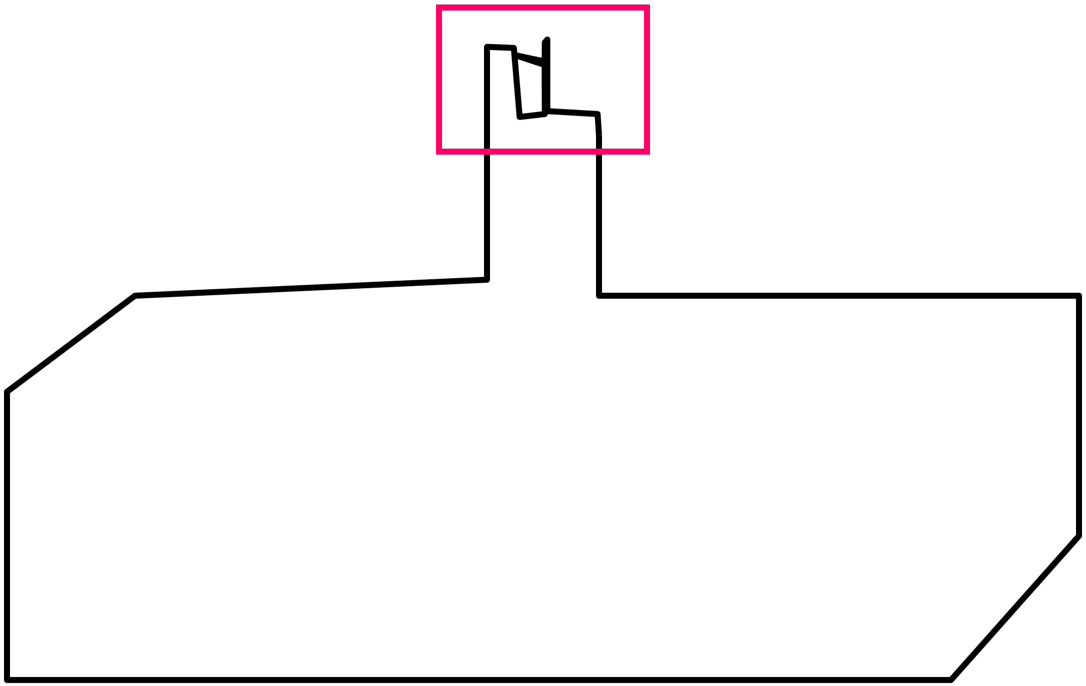
Cet opérateur n'a en fait pas d'application industrielle (du moins tel quel) car:

- Un arrondi naïf casse le plongement
- Les inputs et outputs sont hétérogènes

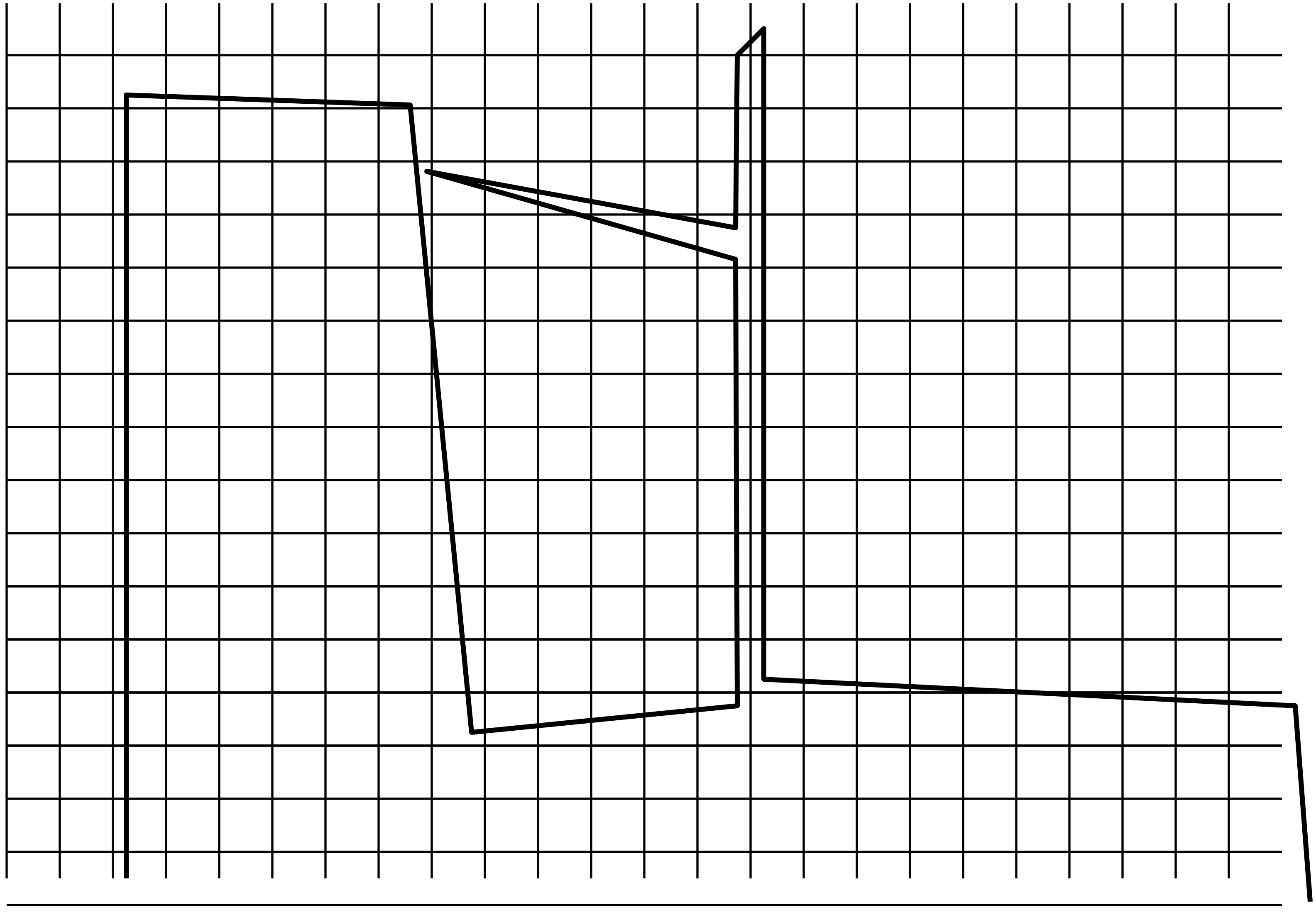
un arrondi naïf casse le plongement



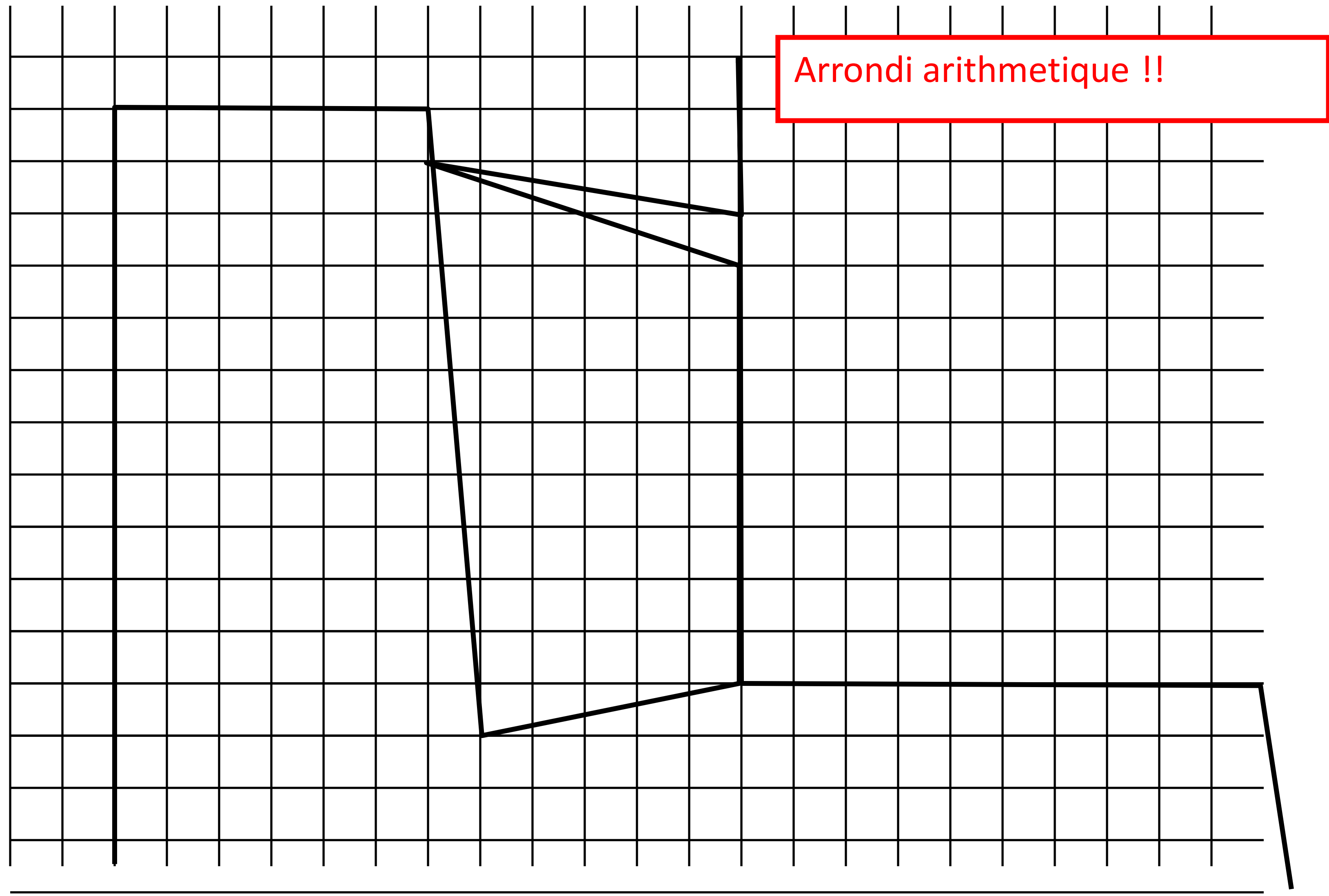
un arrondi naïf casse le plongement



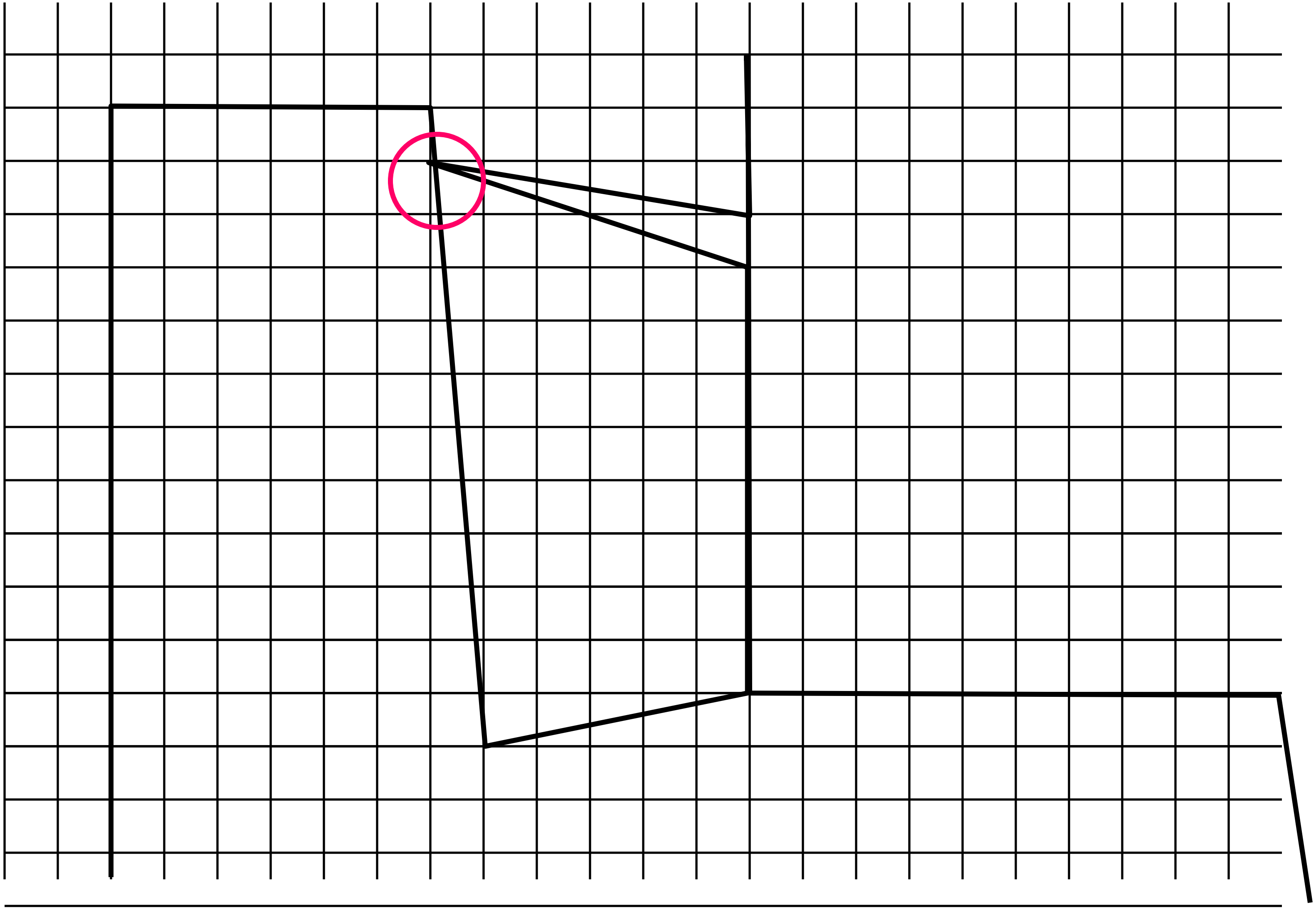
un arrondi naïf casse le plongement



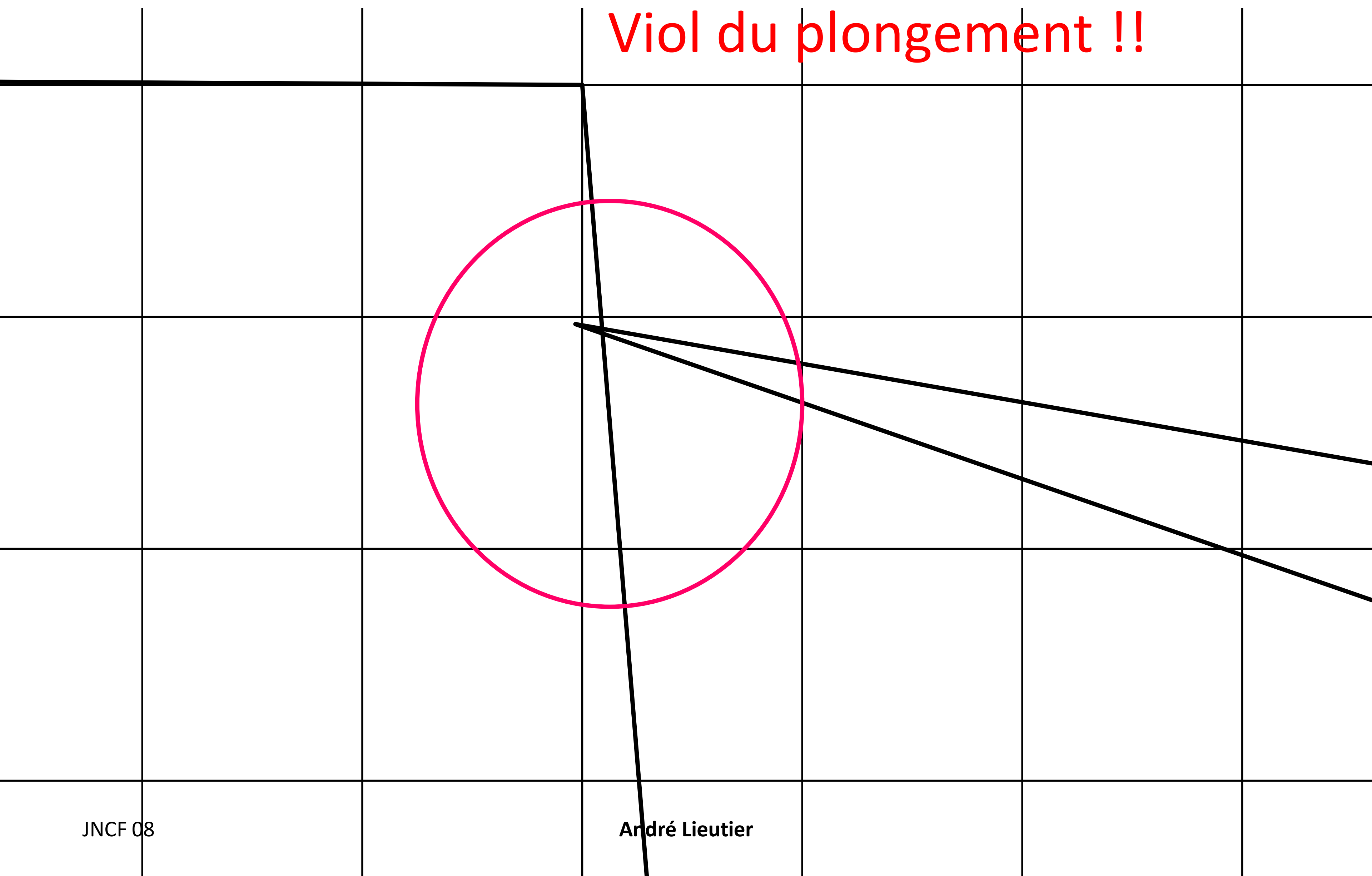
un arrondi naïf casse le plongement



un arrondi naïf casse le plongement



un arrondi naïf casse le plongement



Limites des prédicats exacts

Exemple : Booléen polyédrique : calcul d'union, intersection et différence sur des polyèdres

La réalisation d'opérations booléennes complètement robustes sur des polyèdres reste un problème ouvert et un tel composant serait de grande valeur pour l'industrie.

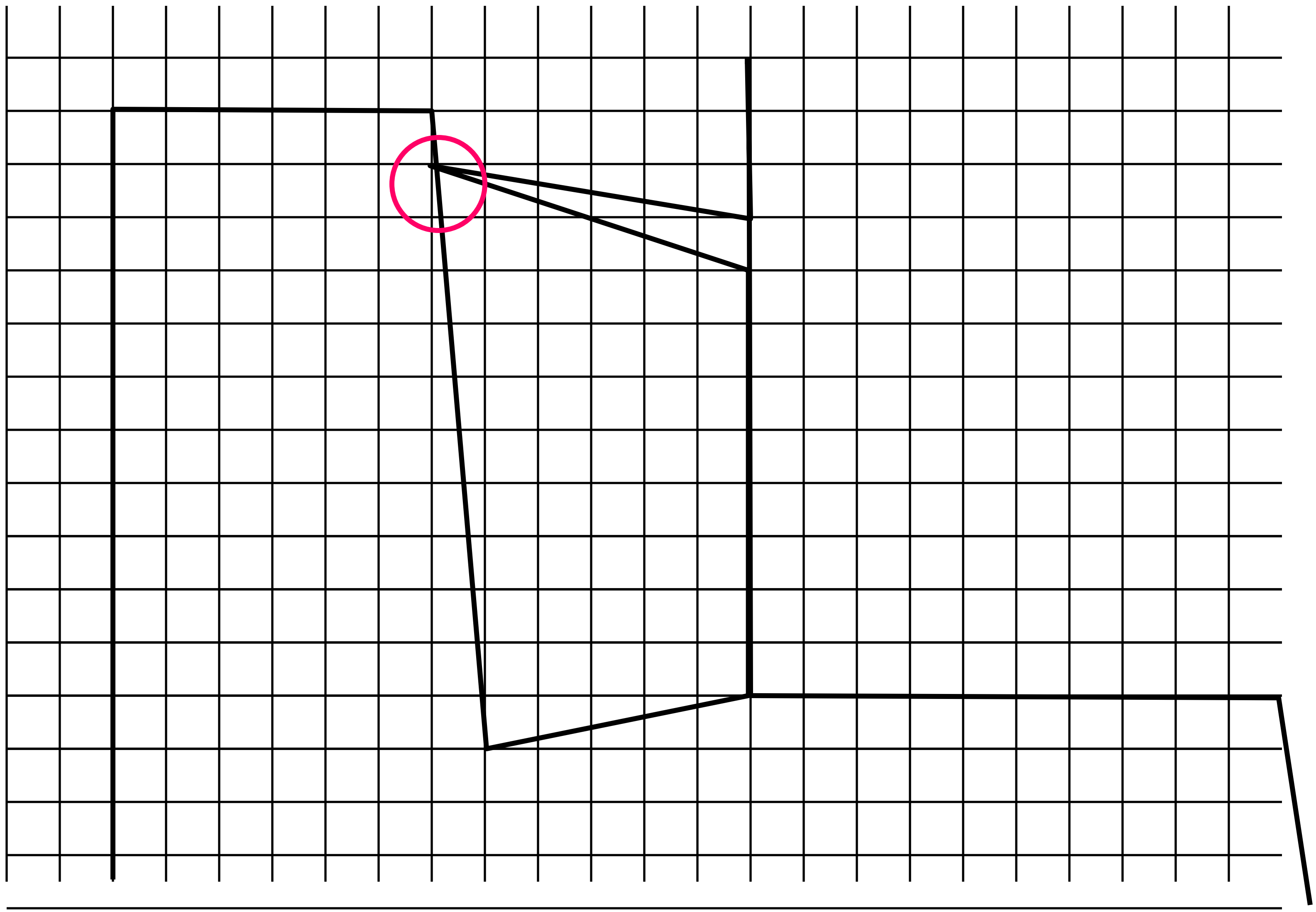
Il existe un tel composant dans CGAL basé sur une technologie de prédicats exacts (Nef Polyhedra) mais 2 problèmes:

- Les opérandes sont supposés bien plongés
- Les coordonnées input sont des flottants (ou entiers) et les coordonnées des outputs des nombres rationnels

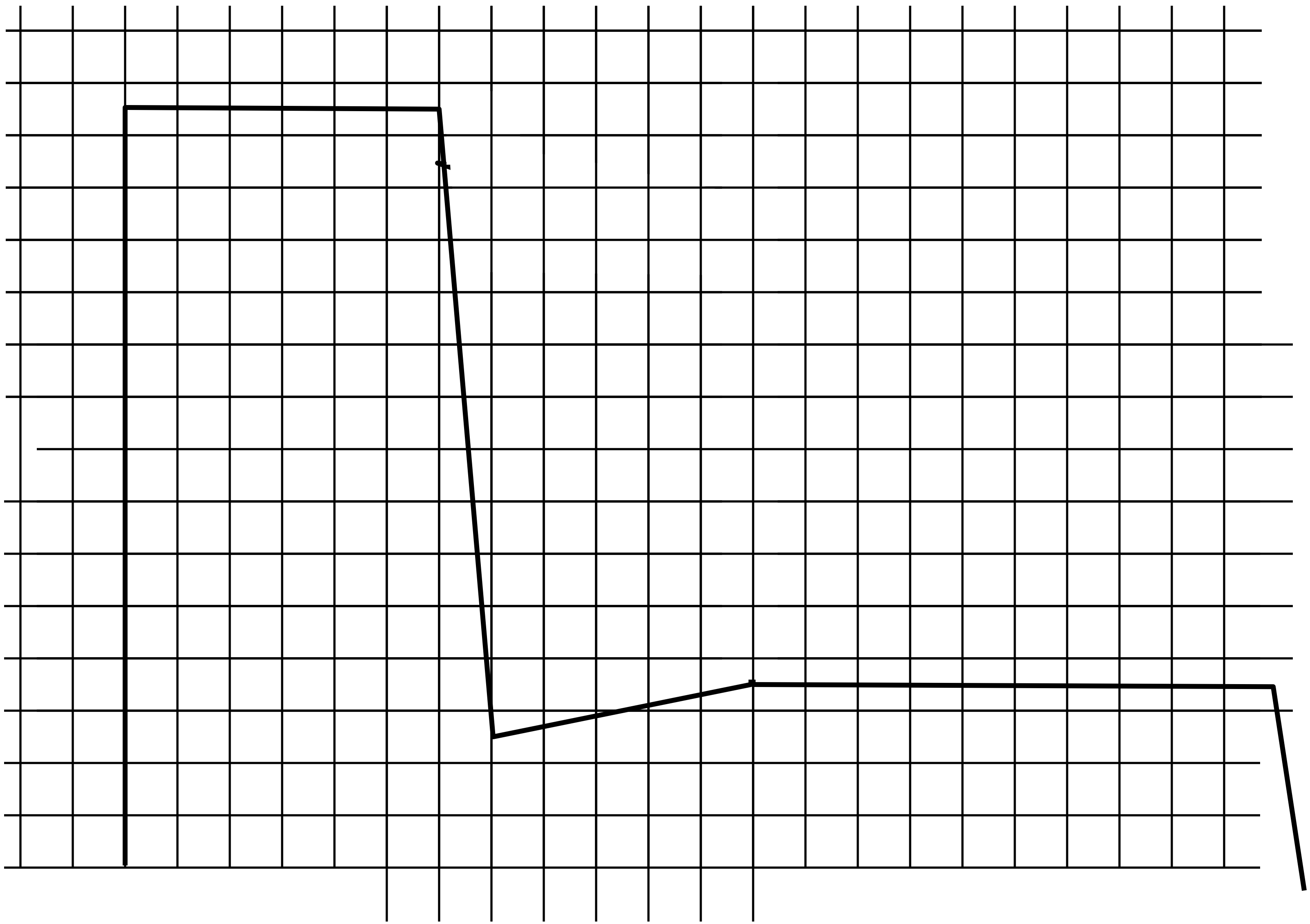
Cet opérateur n'a en fait pas d'application industrielle (du moins tel quel) car:

- Un arrondi naïf casse le plongement
- Les inputs et outputs sont hétérogènes

un arrondi naïf casse le plongement



«Arrondi géométrique »

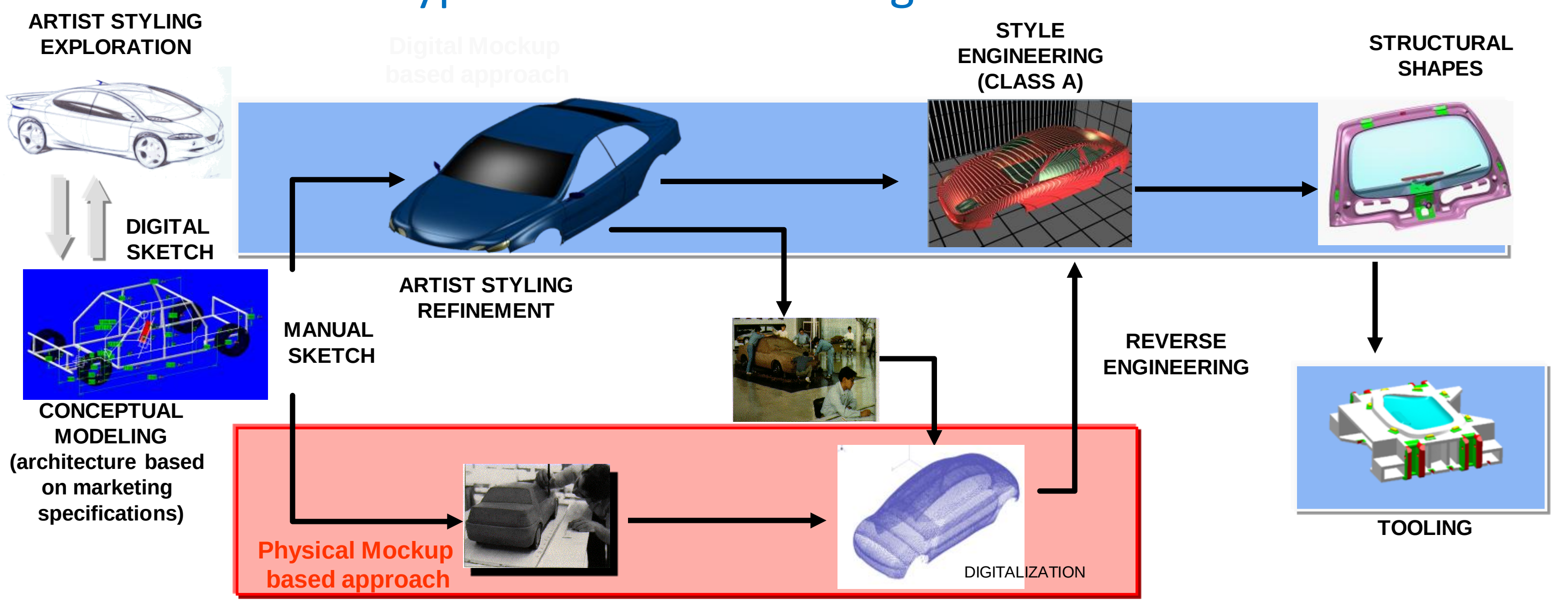


Modèle pour un calcul de profondeur infinie

On veut définir un type de donnée pour représenter des solides dans ce contexte.

Les inputs d'un operateur sont les outputs d'un autre operateur (ou mesure physique..)

Il faut donc des types de donnés homogènes en entrée et sortie



Modèle pour un calcul de profondeur infinie

Il faut donc des types de donnés homogènes en entrée et sortie

Hypothèse du Calcul exact dans ce contexte (absurde):

Un traitement sans arrondi (formel) impliquerait:

- Dans un contexte purement algébrique : explosion de la taille des données (au mieux arbre d'expression)
- Dans un contexte plus général (réaliste) accepter des nombres limites de calculs itératifs => nombres réels calculables

On se heurte alors a la Semi décidabilité de « x== 0 » :

- Interprétation topologique
- Interprétation logique (réduction au problème de l'arrêt)

Ce qui démontre (par l'absurde) le besoin de perdre de l'information pour préserver la complexité des données soit un arrondi (non numérique) (arrondi géométrique/topologique)

Nombres réels calculables

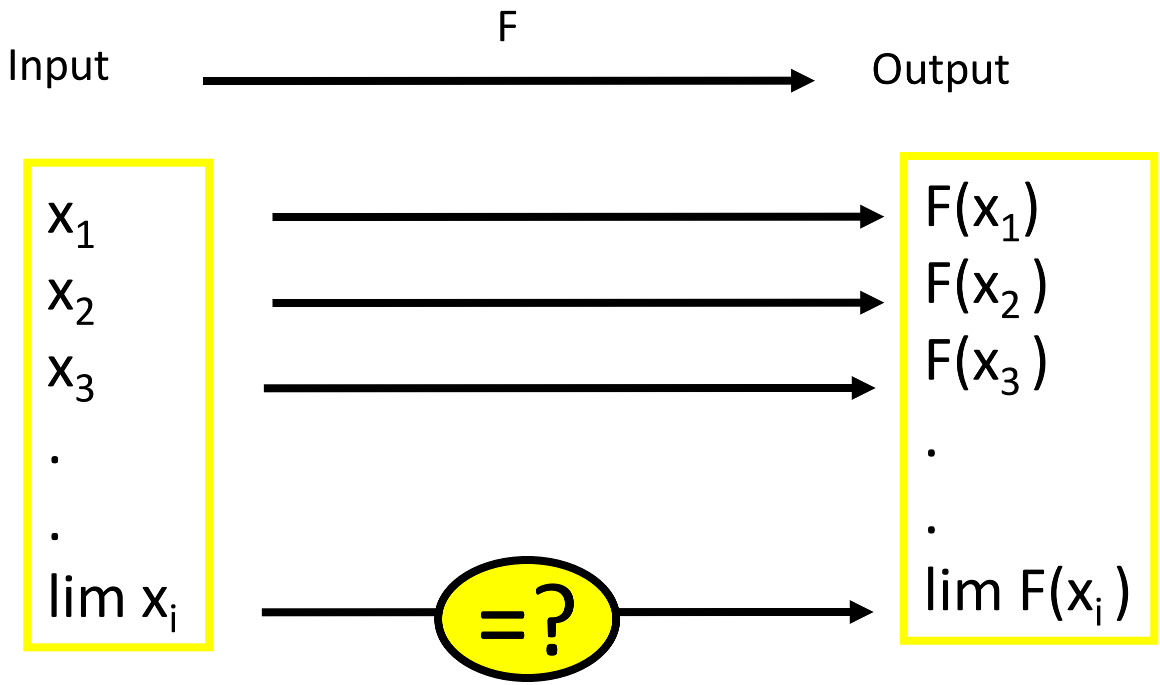
Un réel x est dit calculable si il existe un programme qui, étant donné un entier i en entrée, calcule un nombre rationnel q_i tel que:

$$\boxed{| x - q_i | < 1/2^i}$$

L'ensemble des réels calculable est dénombrable (mais ils ne peuvent être énumérés par un programme).

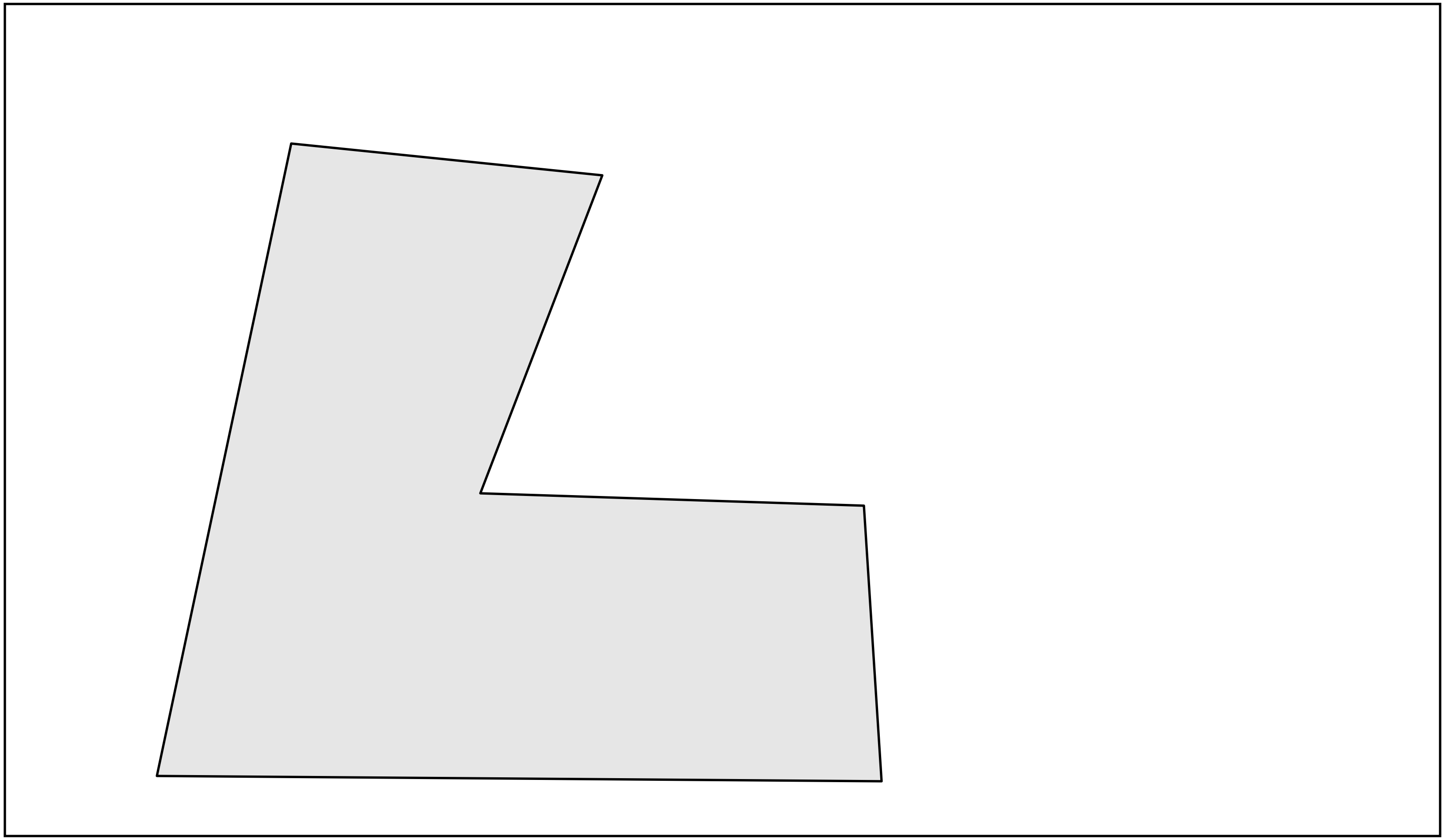
Topologie et calcul

- En théorie de la calculabilité usuelle les type des données sont représentables par des mots de taille finie (ensemble dénombrable)
- Pour modéliser le calcul sur des espaces topologiques ayant la puissance du continu l'analyse récursive propose une calculabilité sur les objets limites. Limite au sens d'une topologie et la calculabilité dépend du choix de topologie.
- Dans ce contexte, les entrées et les sorties sont des sequences infinies d'approximations, qui convergent pour une topologie donnée (donnée eventuellment par une distance).
- Les approximations appartiennent a un ensemble dénombrable dense.

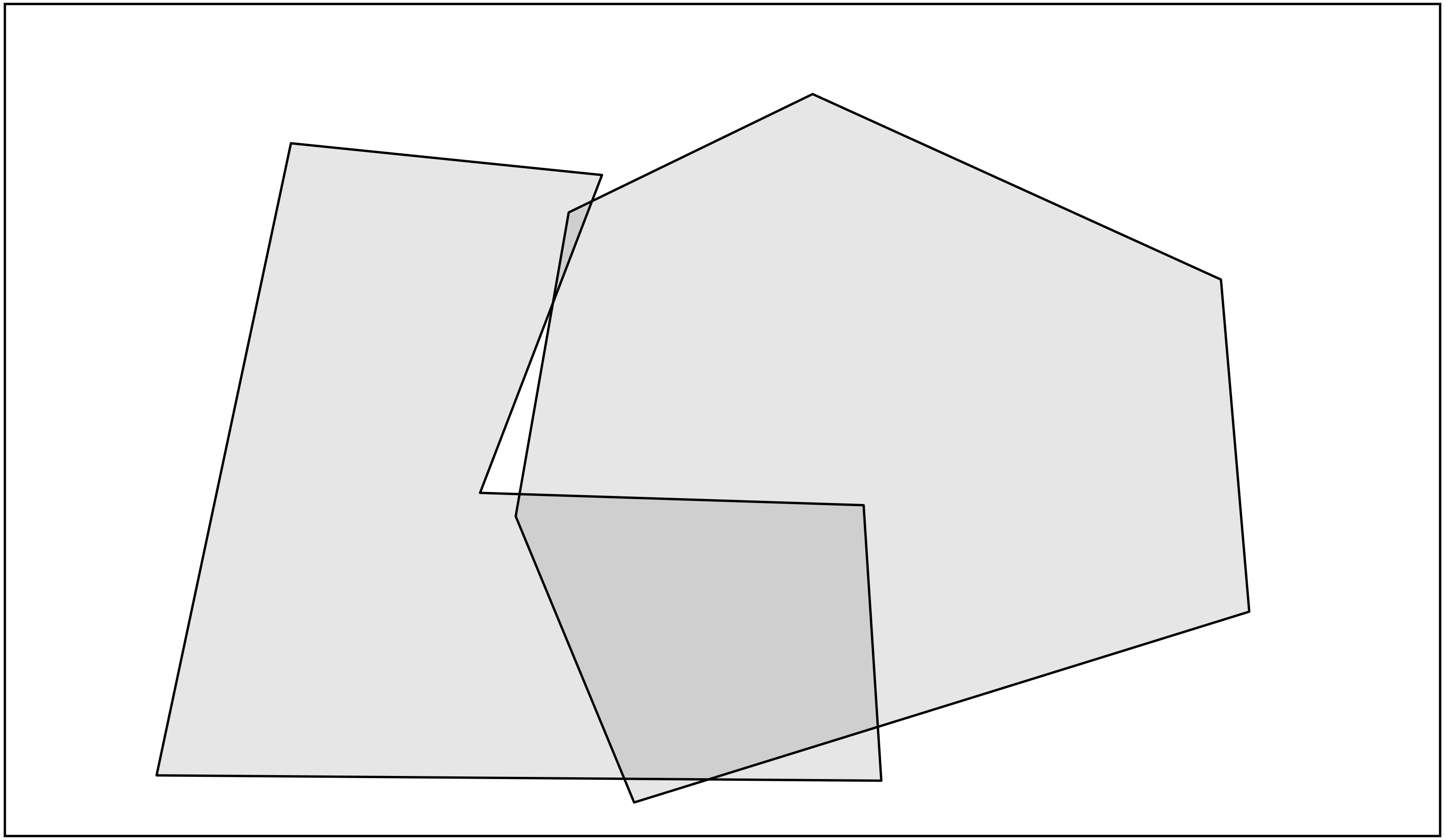


F **computable => *F* continuous**

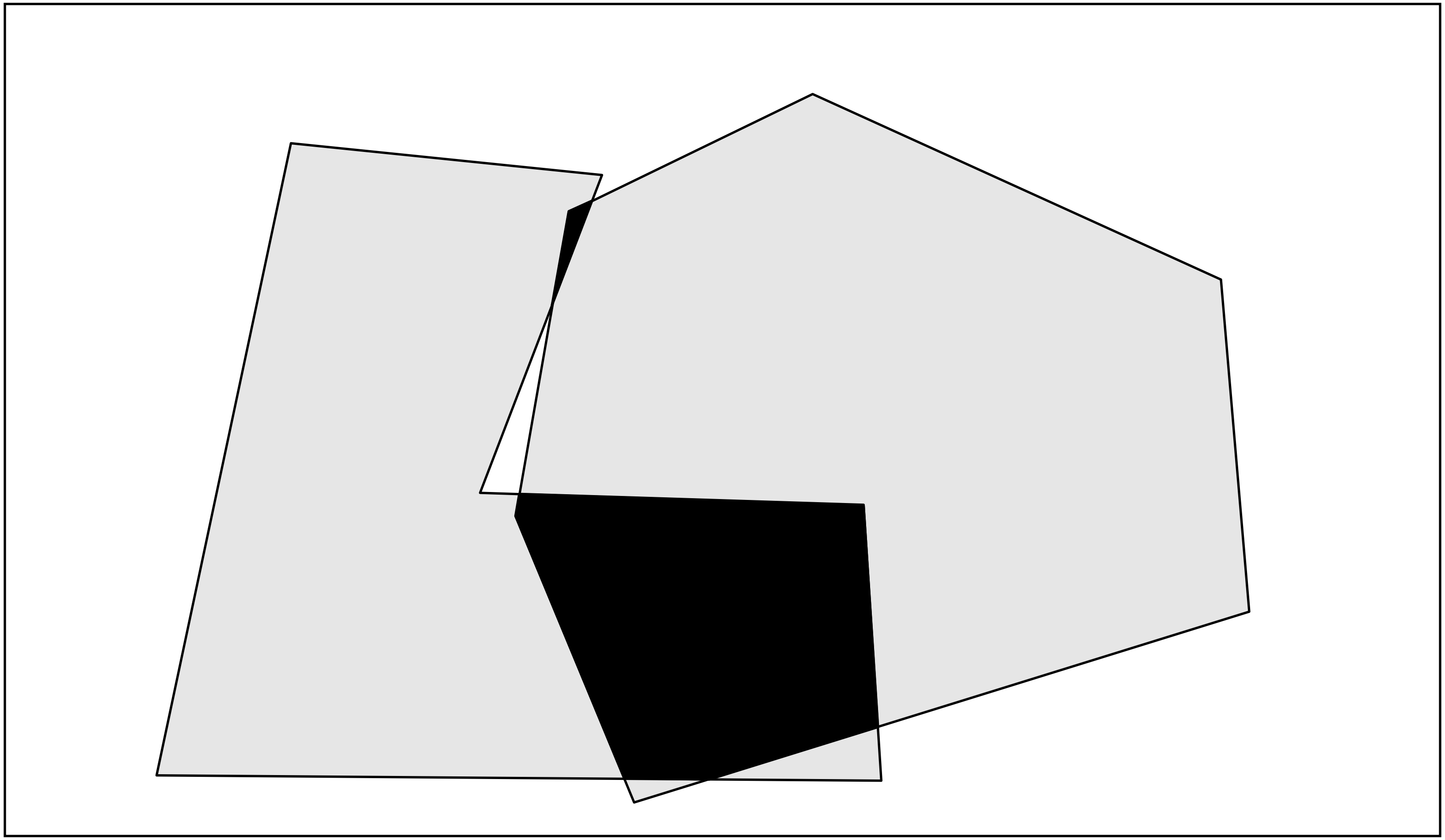
Boolean operations on polygons



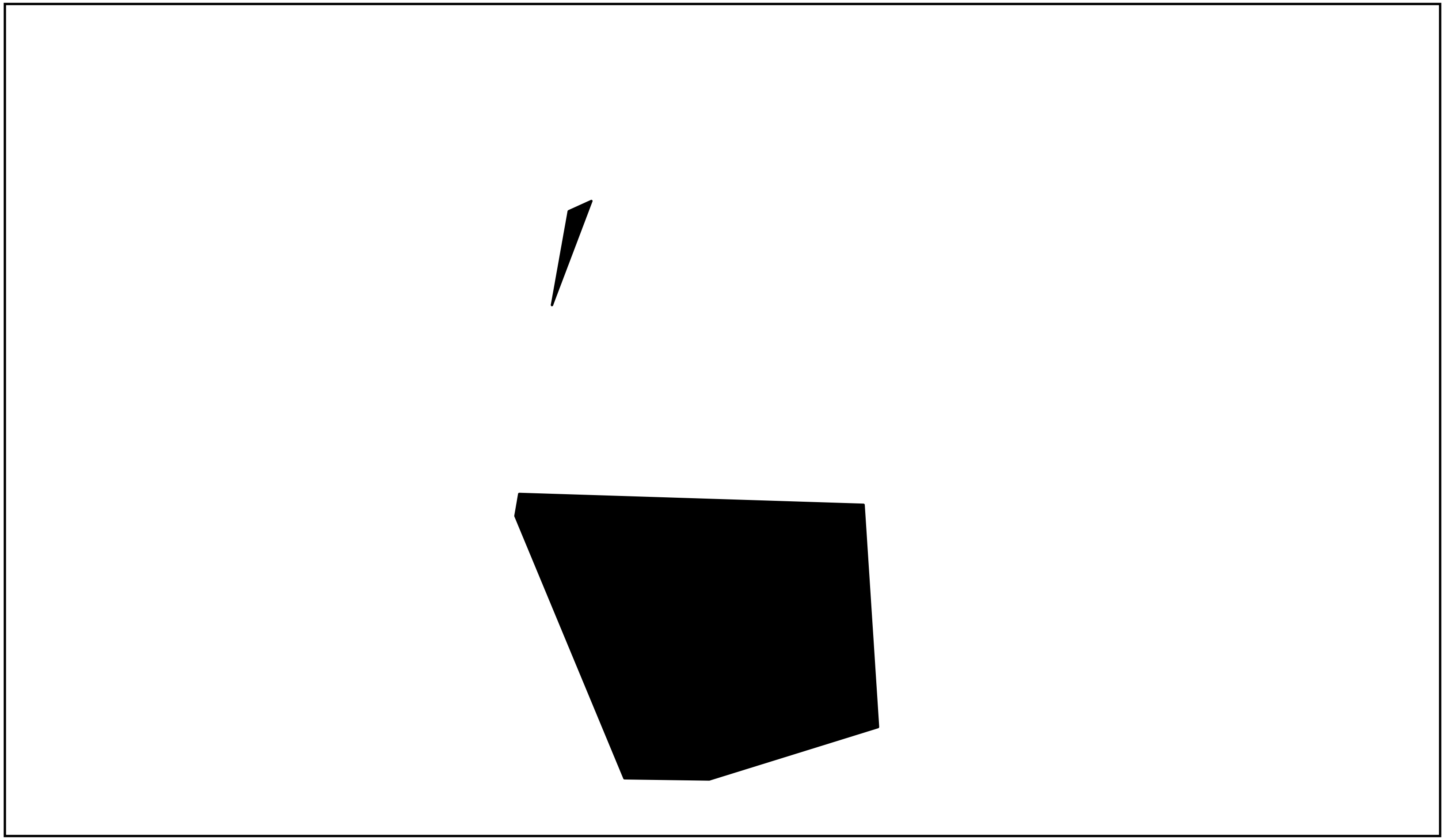
Boolean operations on polygons



Boolean operations on polygons



Boolean operations on polygons



Distance de Hausdorff

Etant donné 2 compacts A et B, leur distance de Hausdorff $d_H(A,B)$ est définie comme:

$$d_H(A,B) = \max(\ \max_{a\in A} d\,(a,B),\ \ \max_{b\in B} d\,(b,A)\ )$$

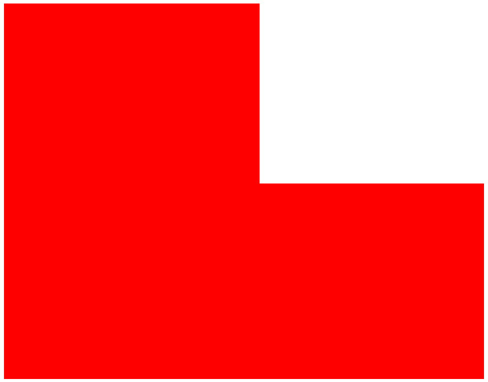
C'est aussi la norme sup de la $(d_A - d_B)$ ou d_A et d_B sont les fonctions distance min respectivement a A et B:

$$d_H(A,B) = \|\ d_A - d_B \|_\infty$$

Ou : $d_A\,(x) = \min_{a\in A} d\,(x, a)$, $d_B\,(x) = \min_{b\in B} d\,(x, b)$,

Exemple de l'intersection de 2 polygones

Intersection de 2 polygones P x P -> P n'est pas continue pour la distance de Hausdorff



Exemple de l’intersection de 2 polygones

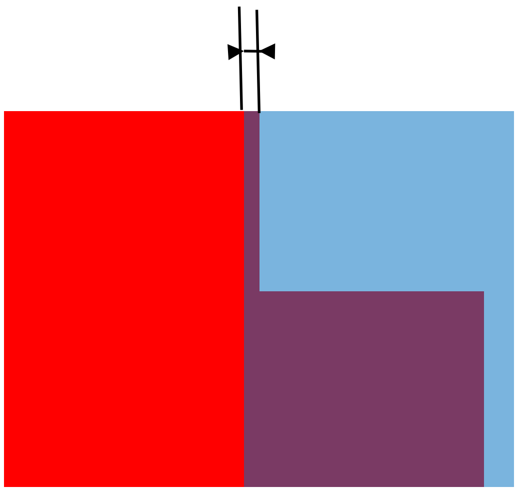
Intersection de 2 polygones P x P -> P n’est pas continue pour la distance de Hausdorff

Exemple de l’intersection de 2 polygones

Intersection de 2 polygones P x P -> P n’est pas continue pour la distance de Hausdorff

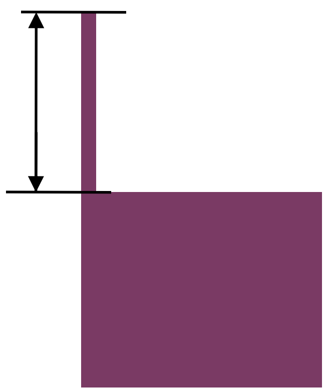
Exemple de l'intersection de 2 polygones

Intersection de 2 polygones P x P -> P n'est pas continue pour la distance de Hausdorff



Exemple de l'intersection de 2 polygones

Intersection de 2 polygones P x P -> P n'est pas continue pour la distance de Hausdorff

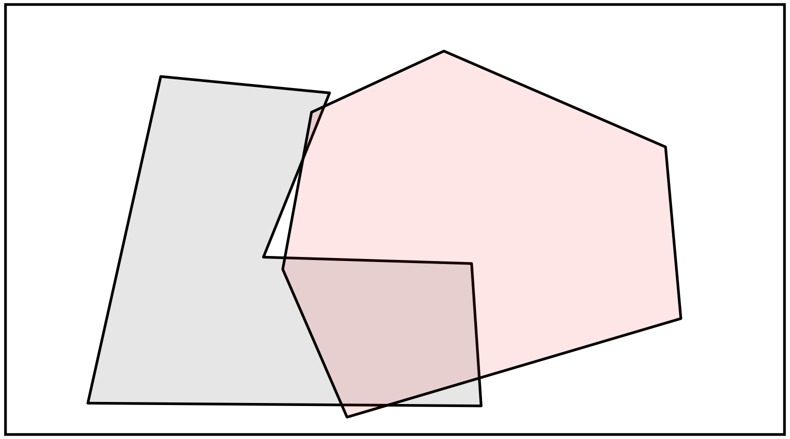


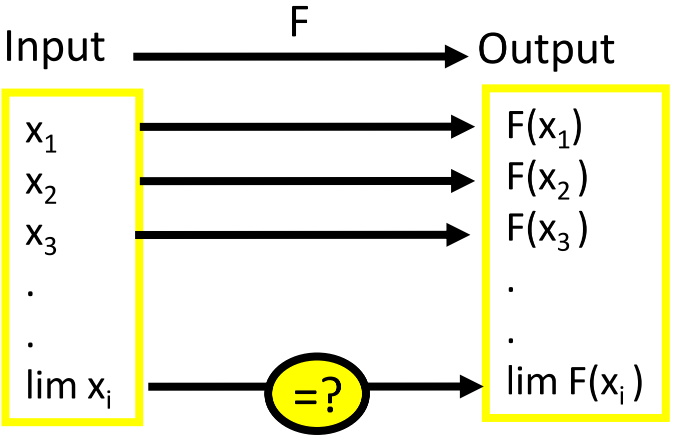
Exemple de l'intersection de 2 polygones

Intersection de 2 polygones P x P -> P n'est pas continue pour la distance de Hausdorff

Mais continue pour:

- la distance de Hausdorff sur les complémentaires
- la norme L^1 sur les fonctions caractéristiques
- Topologie de Scott associée a l'inclusion





Modèle du calcul

Comme pour les réels calculables (pour la topologie usuelle des réels), on peut définir les solides calculables au sens de:

- la distance de Hausdorff
- la distance de Hausdorff sur les complémentaires
- la norme L^1 sur les fonctions caractéristiques
- Topologie de Scott associée a l'inclusion

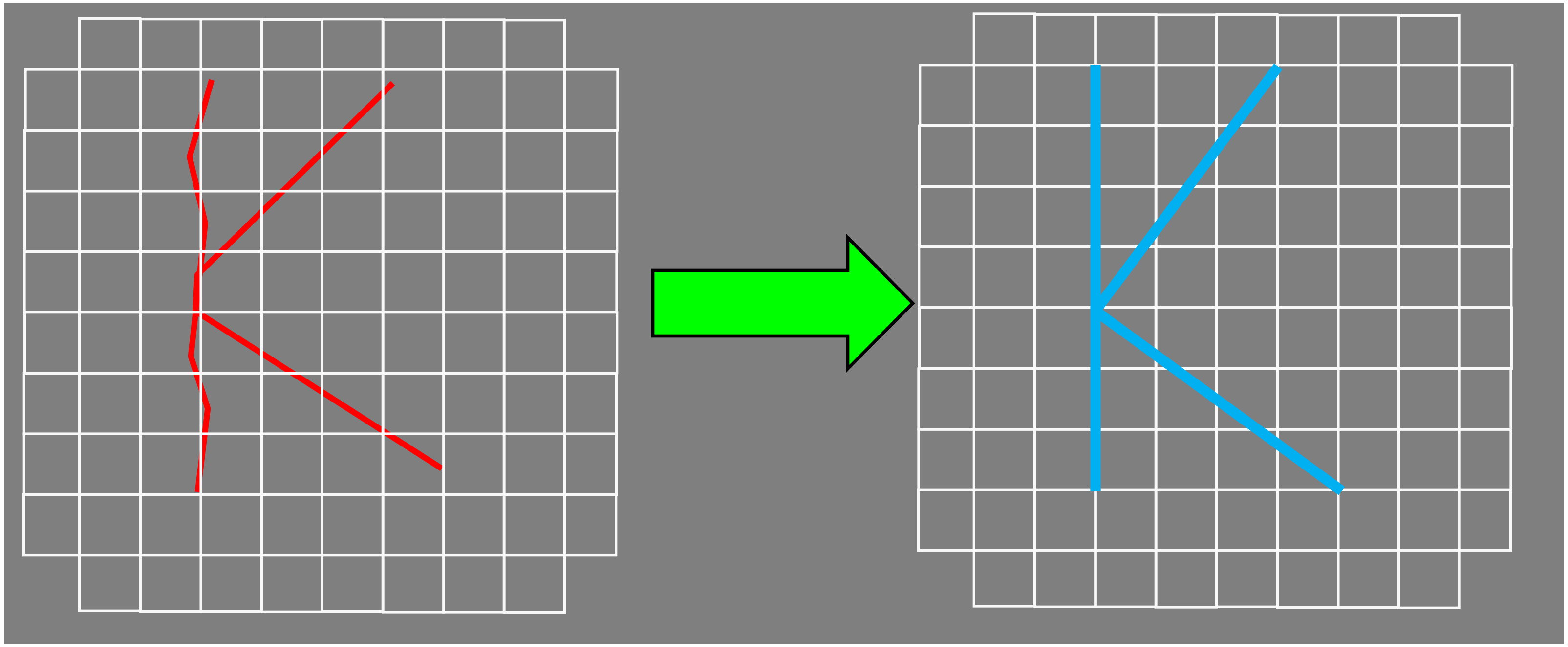
Mini modèle du calcul de profondeur infini pour les solides 2D

On se donne une base de représentation.
Par exemple les polygones dont les coordonnées des sommets sont représentées par une expansion binaire finie .
Après un calcul d'intersection exact dans **Q** entre 2 polygones on doit:

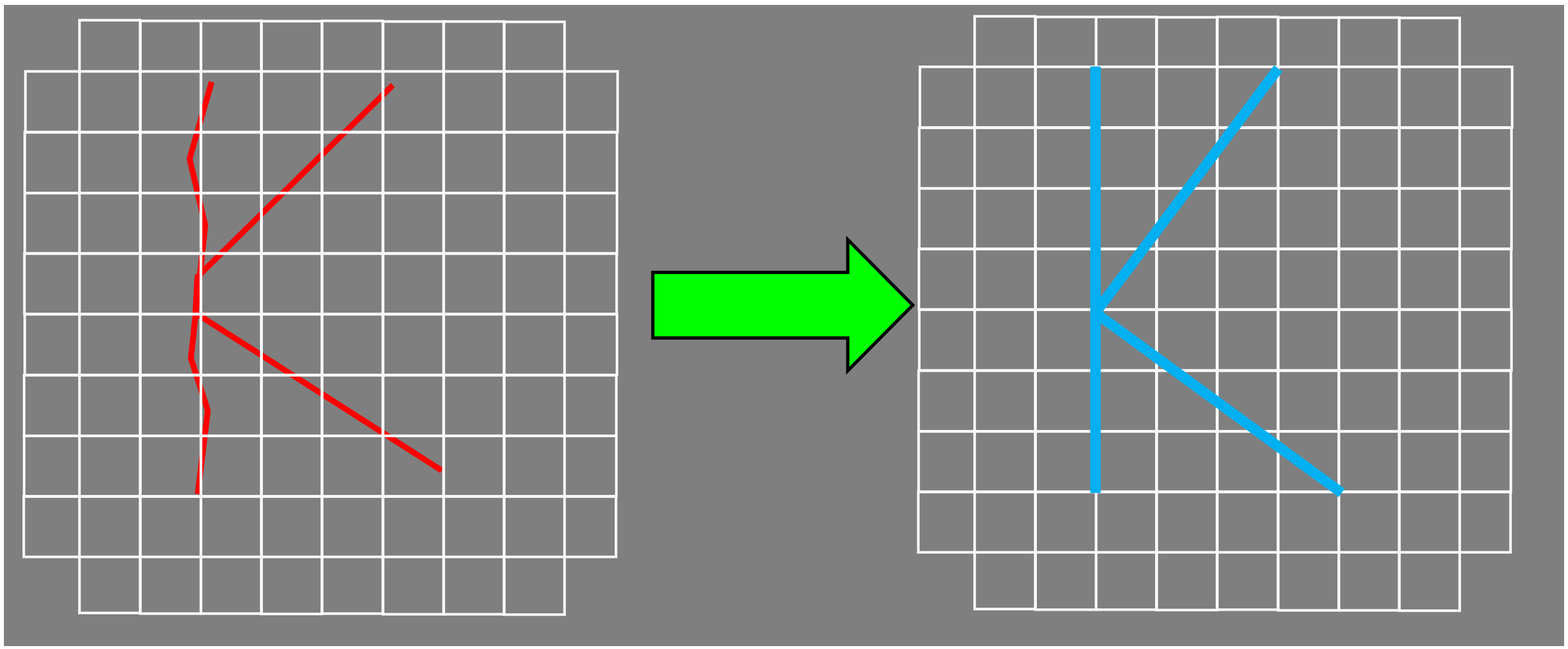
- Arrondir les coordonnées des sommets sur une expansion binaire de longueur donnée
- Arrondir la combinatoire du polygone de façon a contrôler l'augmentation inutile de la taille des données, éviter les défauts de plongements dus aux arrondis numériques. Des solutions semblent exister, en pratique collapser des arêtes suivant un critère adéquat devrait suffire.

En un sens, ces deux arrondis sont de même nature (greatest lower bound in information order.)

Arrondis combinatoire de polygone



Arrondis combinatoire de polygone



$$\sqrt{2} \Rightarrow 1.414$$

Lien entre calculabilité et ligne de recherche sur l'inférence géométrique

Dans cet esprit il y a un travail en cours (avec D.Cohen-Steiner, F. Chazal et B. Thibert) sur une classe de parties de l'espace euclidien (dit ensembles a mu-reach positif) pour lesquels différentes propriétés (topologie, cône normal, courbures) sont stables par Hausdorff perturbation.

Le fait de considérer des propriétés stables par Hausdorff perturbation exclue de faire des hypothèses fortes de régularité (lisse ou analytique ou algébrique)

Problème ouvert

Type de donnée pour représenter les solides en CAO qui serait une version « rigoureuse » des Brep. (Boundary Représentation):

- Les calculs algébriques « exacts » peuvent servir de base pour le calcul entre les objets finis (pas mal de travaux existent)
- Il reste a imaginer une procédure de simplification c'est a dire d'arrondi (tout reste a inventer)