Robots parallèles et positions cuspidales

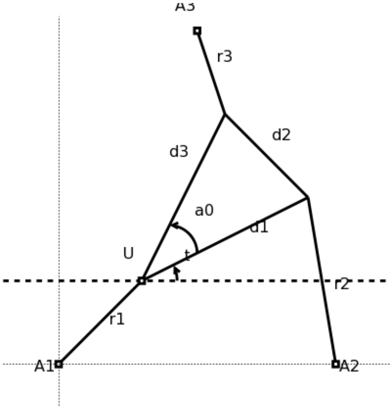
Guillaume Moroz

Lip6 (Université de Paris VI), Salsa (INRIA)

Projet ANR (IRCCYN Nantes, Université Rennes 1, Université Nantes, INRIA coprin)

21 octobre 2008

Robot parallèle plan 3-RPR



- 3 degrés de liberté
- $d_1, d_2, d_3, A_1, A_2, A_3$ fixés
- Paramètres : r_1, r_2, r_3
- Inconnues : t_x, t_y, U_x, U_y

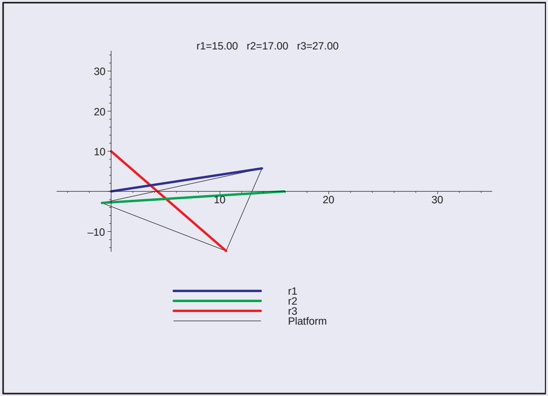
Objectif : Mesurer la mobilité du robot

Outil : Description des points cuspidaux

Propriétés (I)

- Degrés de liberté : 3
- Paramètres r_1, r_2, r_3 fixés $\Rightarrow$ 0 à 6 solutions possibles

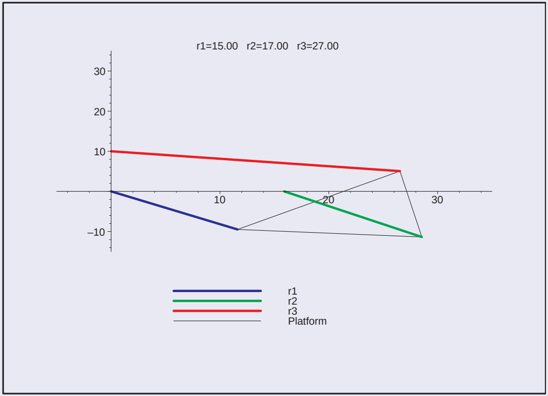
Exemple: $r_1 = 15, r_2 = 17, r_3 = 27$



Propriétés (I)

- Degrés de liberté : 3
- Paramètres r_1, r_2, r_3 fixés $\Rightarrow$ 0 à 6 solutions possibles

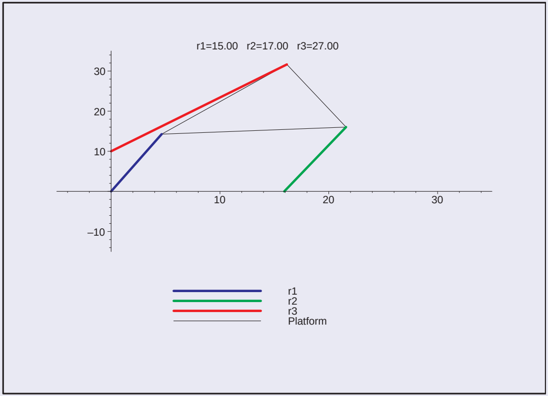
Exemple: $r_1 = 15, r_2 = 17, r_3 = 27$



Propriétés (I)

- Degrés de liberté : 3
- Paramètres r_1, r_2, r_3 fixés $\Rightarrow$ 0 à 6 solutions possibles

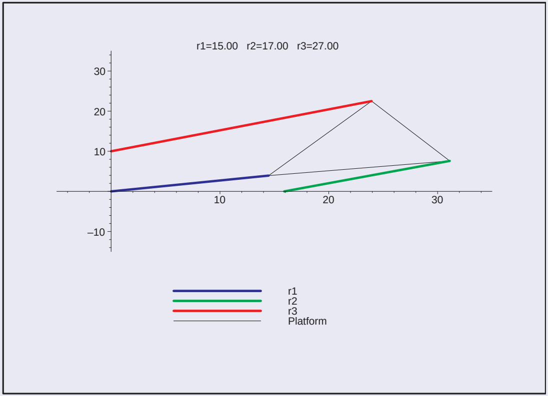
Exemple: $r_1 = 15, r_2 = 17, r_3 = 27$



Propriétés (I)

- Degrés de liberté : 3
- Paramètres r_1, r_2, r_3 fixés $\Rightarrow$ 0 à 6 solutions possibles

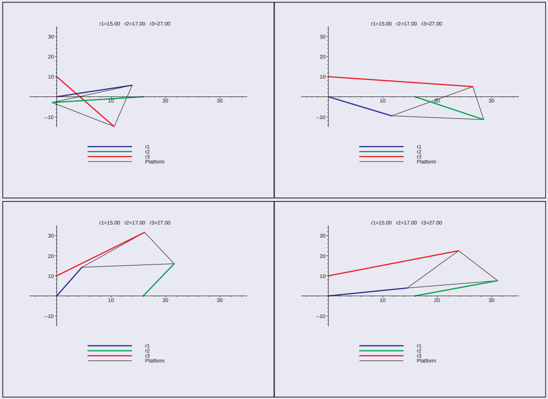
Exemple: $r_1 = 15, r_2 = 17, r_3 = 27$



Propriétés (I)

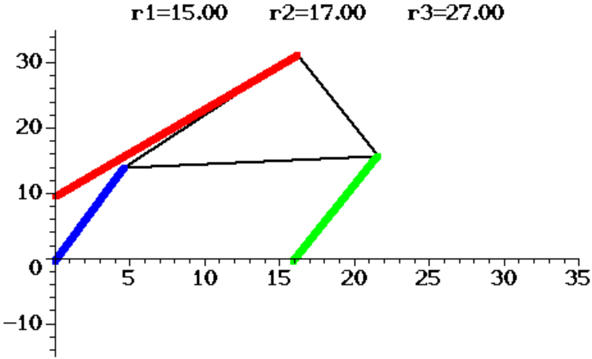
- Degrés de liberté : 3
- Paramètres r_1, r_2, r_3 fixés $\Rightarrow$ 0 à 6 solutions possibles

Exemple: $r_1 = 15, r_2 = 17, r_3 = 27$



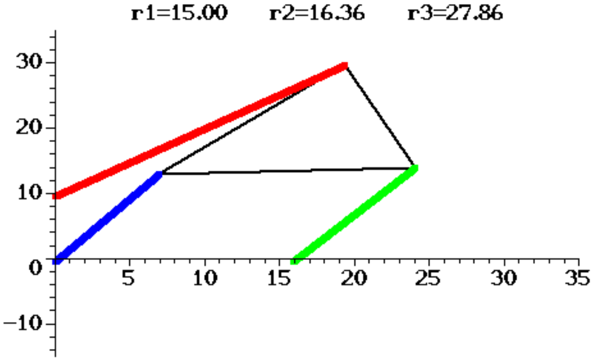
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



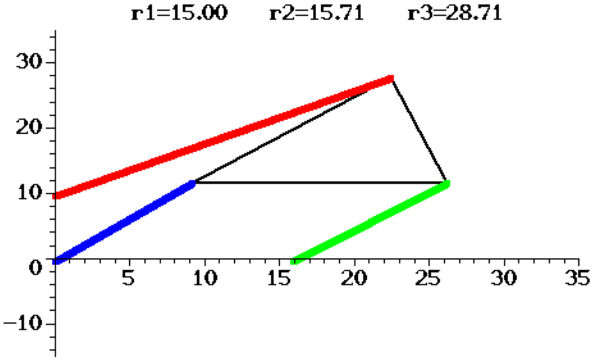
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



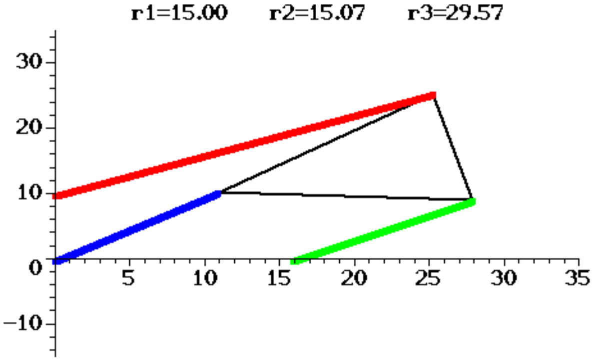
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



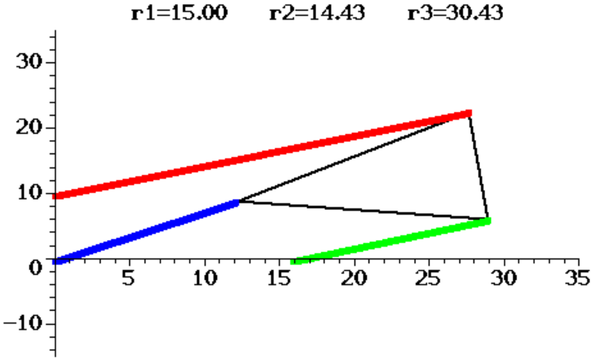
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



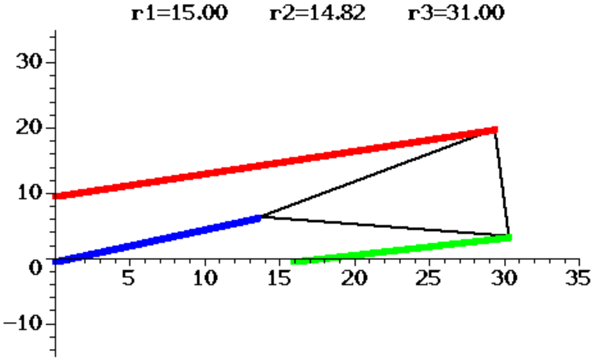
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



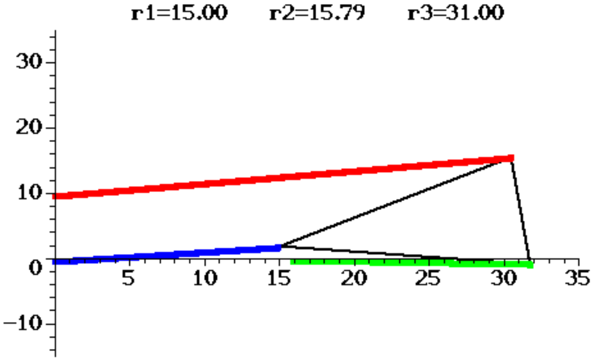
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



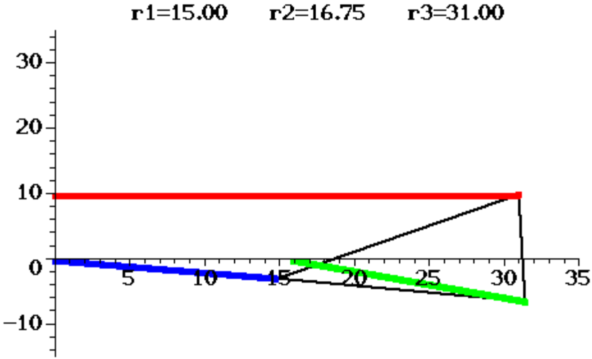
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



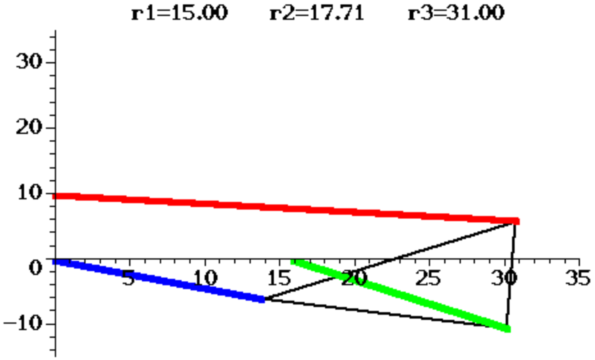
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



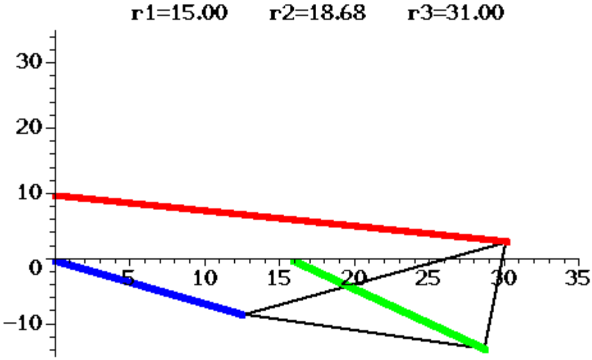
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



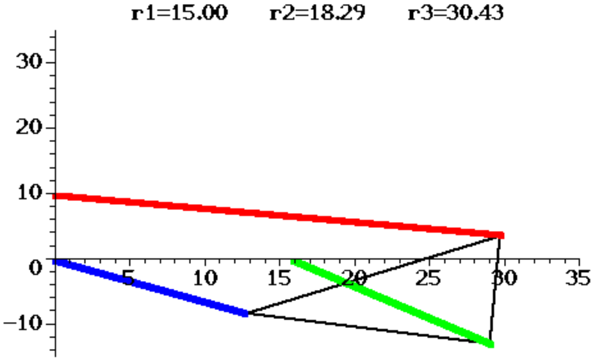
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



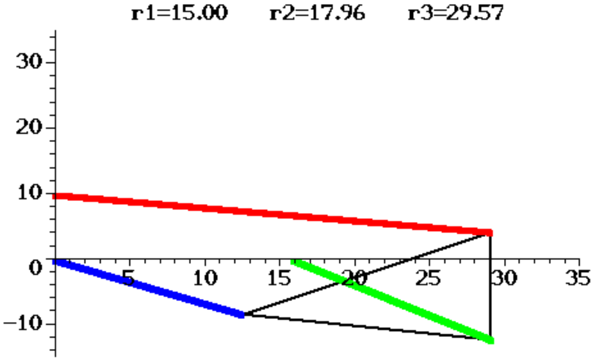
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



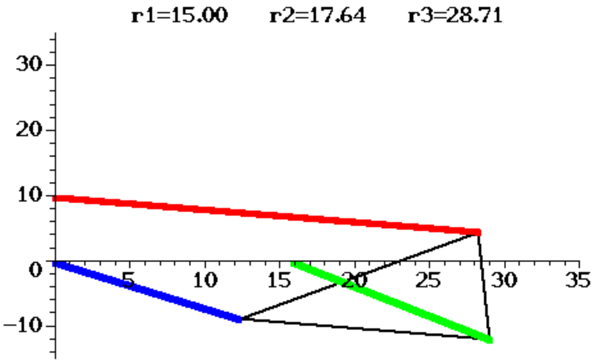
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



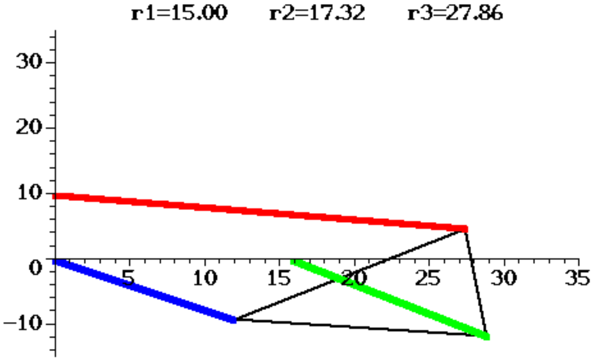
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



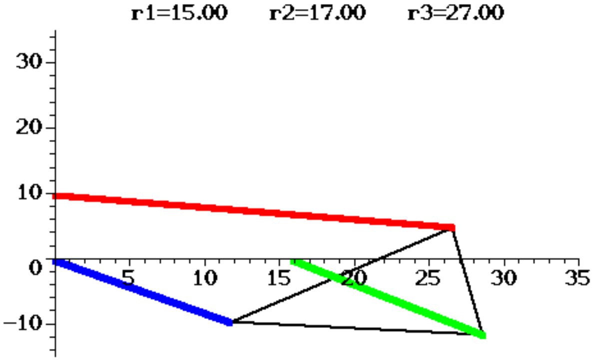
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



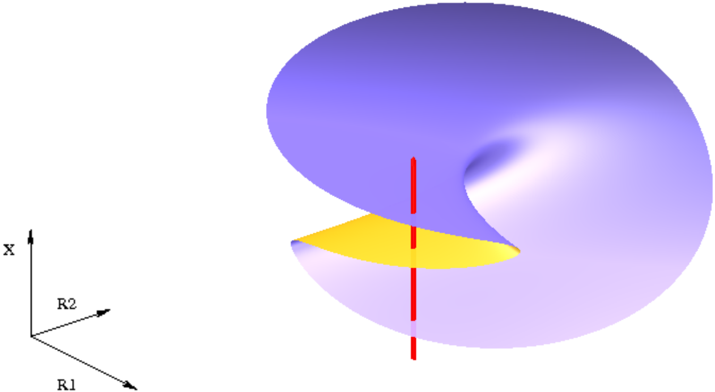
Propriétés (II)

- Robot cuspidal : un chemin relie 2 solutions



Points cuspidaux

- Point cuspidal : point d'ordre ≥ 3
- Critère : un robot cuspidal possède un point cuspidal



Points cuspidaux

- Intérêt :
  - informations sur la mobilité du robot
  - planification de trajectoire
- Étude discrète [Zein, Wenger, Chablat 07] :
  - Développement en séries
  - Courbe de $\mathbb{R}^7$
  - Classification : *nombre de points cuspidaux* en fonction des *valeurs de r_1*

r_1	0.05	2	2.8	6	8	10	12	14	16	18
#Cusp	0	2	4	6	6	6	6	6	6	6

r_1	20	24	26	27	29	31	34	50	75	100
#Cusp	6	6	6	8	4	4	4	4	4	4

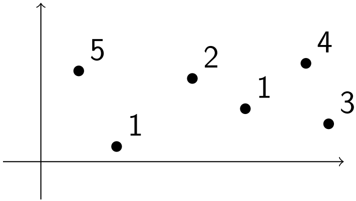
1 Robot parallèle plan
- Propriétés
- Points cuspidaux

2 Approche algébrique
- Critère Jacobien
- Intersection complète

3 Application au robot 3-RPR
- Contraintes cuspidales
- Description

Racines multiples et critère Jacobien

$$I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$$



Définition: Idéal Jacobien $\mathcal{J}(I)$

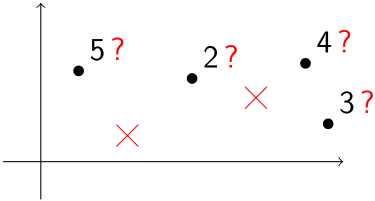
$$\mathcal{J}(I) = \left\langle \textit{Mineurs de} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial X_n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Théorème: Critère Jacobien

L'idéal $I + \mathcal{J}(I)$ définit les racines multiples de I.

Racines multiples et critère Jacobien

$$I + \mathcal{J}(I) = \left\langle f_1, \ldots, f_k, m_1, \ldots, m_{\binom{k}{n}} \right\rangle$$
$$\subset$$
$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$$



Définition: Idéal Jacobien $\mathcal{J}(I)$

$$\mathcal{J}(I) = \left\langle \textit{Mineurs de} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial X_n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Théorème: Critère Jacobien

L'idéal $I + \mathcal{J}(I)$ définit les racines multiples de I.

Exemple local d'une racine multiple

- Polynôme univarié :

$$\begin{aligned} f &= X^n & &\text{degré} \quad n \\ f' &= X^{n-1} & \Rightarrow \langle f, f' \rangle &\text{ de degré} \quad n-1 \end{aligned}$$

- Idéal de degré 3 :

$$\begin{aligned} I &= \left\langle X^2, XY, Y^2 \right\rangle & &\text{degré} \quad 3 \\ \mathcal{J}(I) &= \left\langle X^2, XY, Y^2 \right\rangle & \Rightarrow I + \mathcal{J}(I) &\text{ de degré} \quad 3 \end{aligned}$$

- Idéal de degré 4 :

$$\begin{aligned} I &= \left\langle X^2, Y^2 \right\rangle & &\text{degré} \quad 4 \\ \mathcal{J}(I) &= \langle XY \rangle & \Rightarrow I + \mathcal{J}(I) &\text{ de degré} \quad 3 \end{aligned}$$

Intersection complète en dimension 0

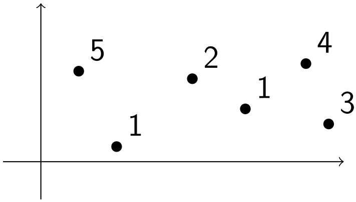
Définition: Intersection complète

I peut être engendré par n équations en n variables.

Théorème: Critère Jacobien étendu

$$\begin{aligned} I \textit{ localement intersection complète} \quad &\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = \deg(I) - 1 \\ I \textit{ localement de degré 2} \quad &\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = 1 \end{aligned}$$

I	$I + \mathcal{J}(I)$	$I + \mathcal{J}(I + \mathcal{J}(I))$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	1	$\emptyset$
3	2	1
$d \geq 4$	$d - 1$	≥ 1



Intersection complète en dimension 0

Définition: Intersection complète

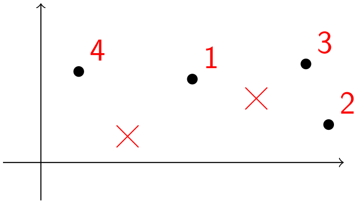
I peut être engendré par n équations en n variables.

Théorème: Critère Jacobien étendu

I localement intersection complète $\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = \deg(I) - 1$

I localement de degré 2 $\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = 1$

I	$I + \mathcal{J}(I)$	$I + \mathcal{J}(I + \mathcal{J}(I))$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	1	$\emptyset$
3	2	1
$d \geq 4$	$d - 1$	≥ 1



Intersection complète en dimension 0

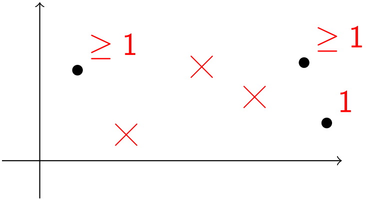
Définition: Intersection complète

I peut être engendré par n équations en n variables.

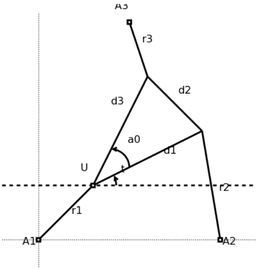
Théorème: Critère Jacobien étendu

$$\begin{aligned} I \text{ localement intersection complète} &\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = \deg(I) - 1 \\ I \text{ localement de degré 2} &\Rightarrow \deg_\alpha(I + \mathcal{J}(I)) = 1 \end{aligned}$$

I	$I + \mathcal{J}(I)$	$I + \mathcal{J}(I + \mathcal{J}(I))$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	1	$\emptyset$
3	2	1
$d \geq 4$	$d - 1$	≥ 1



Équations de contrainte du robot 3-RPR



$$
\begin{cases}
f_1 := t_x{}^2 + t_y{}^2 - 1 & = 0 \\
f_2 := U_x{}^2 + U_y{}^2 - r_1{}^2 & = 0 \\
f_3 := (U_x + 17.04 t_x - 15.91)^2 + (U_y + 17.04 t_y)^2 - r_2{}^2 & = 0 \\
f_4 := (U_x + 10.82 t_x - 13.16 t_y - 2)^2 + & \\
\qquad (U_y + 13.16 t_x + 10.82 t_y - 5)^2 - r_3{}^2 & = 0
\end{cases}
$$

- 3 paramètres, 4 inconnues
- Génériquement 0-dimensionnel
- Génériquement en intersection complète

Points triples

Système (S) :

$$I : \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{J}(I) : j_0 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0$$

$$\mathcal{J}(I + \mathcal{J}(I)) : \begin{cases} j_0 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_1 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{j_0}) = 0 \\ j_2 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{j_0}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_3 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{j_0}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_4 := \det(d\vec{j_0}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \end{cases}$$

- Courbe dans $\mathbb{C}^7$ (idéal déterminentiel)
- Description :
  - r_1 : paramètre
  - $r_2, r_3, t_x, t_y, u_x, u_y$: inconnues
  - $N : x \mapsto \#\{\text{solutions réelles de } (S) \text{ pour } r_1 = x\}$

Points triples

Système (S) :

$$I : \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{J}(I) : j_0 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0$$

$$\mathcal{J}(I + \mathcal{J}(I)) : \begin{cases} j_0 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_1 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{j_0}) = 0 \\ j_2 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{f_2}, d\vec{j_0}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_3 := \det(d\vec{f_1}, d\vec{j_0}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \\ j_4 := \det(d\vec{j_0}, d\vec{f_2}, d\vec{f_3}, d\vec{f_4}) = 0 \end{cases}$$

- Courbe dans $\mathbb{C}^7$ (idéal déterminentiel)
- Description :
  - r_1 : paramètre
  - $r_2, r_3, t_x, t_y, u_x, u_y$: inconnues
  - $N : x \mapsto \#\{\text{solutions réelles de } (S) \text{ pour } r_1 = x\}$

Nombre de points cuspidaux, variété discriminante

Variété discriminante :

- $V = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$
- N constante sur $]a_i, a_{i+1}[$

Calcul :

- $\begin{cases} \text{Variables } r_2, r_3, t_x, t_y, u_x, u_y \text{ en position de Noether} \\ \text{Ideal radical} \end{cases}$

$\Rightarrow$ V valeurs critiques de la projection sur r_1 :

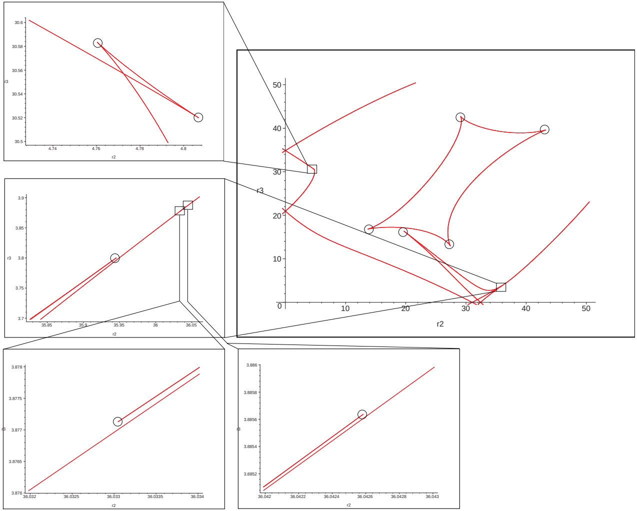
- $m_1, \dots, m_{\binom{9}{6}}$ mineurs de : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{r_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{u_y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{r_2} & \dots & \frac{\partial f_4}{u_y} \\ \frac{\partial j_0}{r_2} & \dots & \frac{\partial j_0}{u_y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial j_4}{r_2} & \dots & \frac{\partial j_4}{u_y} \end{pmatrix}$
- Éliminations des variables $r_2, r_3, t_x, t_y, u_x, u_y$ de l'idéal :

$$\left\langle f_1, \dots, f_4, j_0, \dots, j_4, m_1, \dots, m_{\binom{9}{6}} \right\rangle$$

Classification des points triples :

N		0		2		4		2
r_1	0.000	]——[	0.148	]——[	1.655	]——[	1.660	]——[
N		4		6		8		6
r_1	2.261	]——[	2.975	]——[	9.18678	]——[	9.18686*	]——[
N		8		6		8		6
r_1	9.257662	]——[	9.257677*	]——[	10.9056649	]——[	10.9056683*	]——[
N		8		6		8		6
r_1	14.579115749	]——[	14.579115757*	]——[	20.555	]——[	20.562	]——[
N		8		10		8		6
r_1	26.786	]——[	28.094	]——[	28.107	]——[	28.257	]——[
N		8		6		2		
r_1	30.740	]——[	30.779	]——[	30.946	]————————		

10 points cuspidaux



Courbes des points singuliers pour $r_1 = 28.10$

Conclusion

Modélisation :

- Extension du critère jacobien

Positions cuspidales :

- Description certifiée et exhaustive
- 10 points cuspidaux pour $r_1 = 28.10$

Perspectives :

- Application : relâcher des paramètres pour étendre la classification
- Algorithme : généralisation aux multiplicités $d \geq 4$?

Merci !