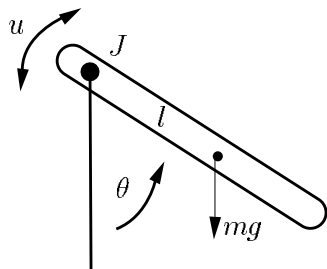


# Systemes différentiellement plats

Pierre Rouchon

Centre Automatique et Systemes  
Mines ParisTech  
pierre.rouchon@mines-paristech.fr

JNCF, CIRM, octobre 2008



- Newton (EDO) :

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -p \sin(\theta) + u$$

Oscillateur non-linéaire avec contrôle  $u$  et  $p > 0$  paramètre.

- Méthode du couple calculé :

$u_r = \frac{d^2}{dt^2}\theta_r + p \sin \theta_r$  donne une description explicite des trajectoires via une fonction  $KC^2$  arbitraire du temps :  
 $t \mapsto \theta_r(t)$ , la sortie plate (sorte de base).

Planification et suivi de trajectoires ( $\xi, \omega_0 > 0$  gains du "feedback")

$$u \left( t, \theta, \frac{d}{dt}\theta \right) = \frac{d^2}{dt^2}\theta_r + p \sin \theta - 2\xi\omega_0 \left( \frac{d}{dt}\theta - \frac{d}{dt}\theta_r \right) - (\omega_0)^2 \sin(\theta - \theta_r)$$

où  $t \mapsto \theta_r(t)$  définit la trajectoire de référence (la tâche à réaliser).

Le système de 2 équations à 3 variables  $(x_1, x_2, u)$  ( $a_1, a_2 > 0$  et  $a_1 \neq a_2$ )

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

définit une **module libre** de base  $y = \frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_2 - a_1}$  :

$$\begin{cases} x_1 = y + \frac{d^2}{dt^2}y/a_2, & \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}y + \frac{d^3y}{dt^3}/a_2 \\ x_2 = y + \frac{d^2}{dt^2}y/a_1, & \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}y + \frac{d^3y}{dt^3}/a_1 \\ u = y + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \frac{d^2}{dt^2}y + \left(\frac{1}{a_1a_2}\right) \frac{d^4}{dt^4}y \end{cases}$$

Trajectoire de référence allant de l'équilibre  $x_1 = x_2 = u = 0$  en  $t = 0$  à l'équilibre  $x_1 = x_2 = u = D$  en  $t = T > 0$  :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{(t)^4}{t^4 + (T-t)^4} D & \text{si } t \in [0, T], \\ D & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

Généralisation à  $n$  oscillateurs en parallèle et à tout système linéaire commandable,  $\frac{d}{dt}X = AX + Bu$ .

- **Systèmes commandés explicites** :  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ) est plat, ssi, existent  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $h(x, u, \dots, u^{(\alpha)}) \in \mathbb{R}^m$  tels que la solution de

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad y = h(x, u, \dots, u^{(\alpha)})$$

soit ( $\beta \in \mathbb{N}$ )

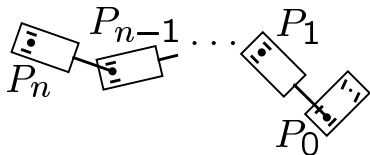
$$x = \mathcal{A}(y, \dots, y^{(\beta)}), \quad u = \mathcal{B}(y, \dots, y^{(\beta+1)})$$

- **Systèmes sous-déterminés implicites** :  $F(x, \dots, x^{(r)}) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n-m}$ ) est plat, ssi, existent  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $h(x, \dots, x^{(\alpha)}) \in \mathbb{R}^m$  tels que la solution de

$$F(x, \dots, x^{(r)}) = 0, \quad y = h(x, \dots, x^{(\alpha)}) \quad \text{soit} \quad x = \mathcal{A}(y, \dots, y^{(\beta)})$$

$y$  est appelé **sortie plate** du système : Fliess et collaborateurs 1991, ...

Systèmes différentiels sous-déterminés **intégrables** : Monge (1784), Darboux, Goursat, Hilbert (1912), Cartan (1914).

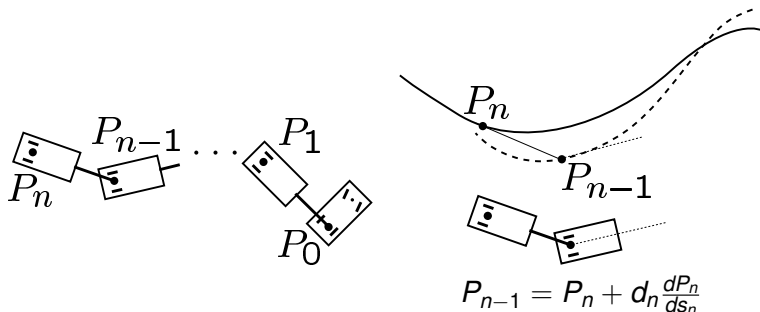


- **Roulement sans glissement** : la vitesse de chaque  $P_i$  est parallèle à la direction  $\theta_i$  de la remorque  $i$  de longueur  $d_i > 0$ .
- $P_0$  de coordonnées cartésiennes  $(x_0, y_0)$  ; les deux contrôles scalaires sont  $v$  la vitesse et  $\phi$  l'angle de braquage.

$$\frac{d}{dt}x_0 = v \cos \theta_0, \quad \frac{d}{dt}y_0 = v \sin \theta_0, \quad \frac{d}{dt}\theta_0 = \frac{v}{d_0} \tan \phi = \omega$$

$$\frac{d}{dt}\theta_i = \frac{v}{d_i} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

**Sortie plate** :  $P_n$  ; preuve uniquement avec un dessin et les formules de Frénet.



- **Invariance** par rapport au groupe  $SE(2)$ .
- Sortie plate non unique :  $(\xi = x_n, \zeta = y_n + \frac{d}{dt}x_n)$  est **une autre sortie plate** car  $x_n = \xi$  et  $y_n = \zeta - \frac{d}{dt}\xi$ .
- La sortie plate  $(x_n, y_n)$  formée par les coordonnées cartésiennes de  $P_n$  est **plus naturelle** que  $(\xi, \zeta)$ . Elle repose sur une fonction de sortie  $h$  **équivariante**.

## Sortie plate et symétries : une question ouverte.

- Soit le système implicite  $F(x, \dots, x^{(r)}) = 0$  de sortie plate  $y = h(x, \dots, x^{(\alpha)}) \in \mathbb{R}^m$  (i.e.  $x = \mathcal{A}(y, \dots, y^{(\beta)})$ )
- Soit un **groupe  $G$  agissant sur l'espace des  $x$**  via les difféomorphismes  $X = \phi_g(x)$  ( $x = \phi_{g^{-1}}(X)$ ) et qui laisse l'idéal des équations  $F = 0$  invariant :

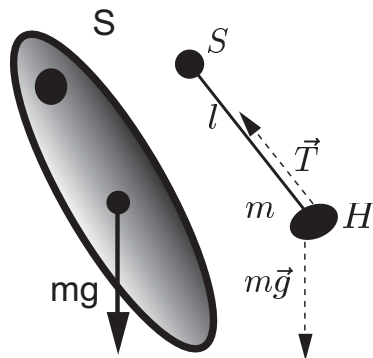
$$F(x, \dots, x^{(r)}) = 0 \iff F\left(\phi_g(x), \dots, \phi_g^{(r)}(x, \dots, x^{(r)})\right) = 0$$

- **Question** : sous quelle(s) condition(s) existe-t-il une sortie plate  $\bar{y} = \bar{h}(x, \dots, \bar{x}^{(\bar{\alpha})})$  **équivariante**, i.e. telle qu'il existe une action de  $G$  sur l'espace des  $\bar{y}$  définie par  $\bar{Y} = \rho_g(\bar{y})$  de sorte que

$$\rho_g(\bar{y}) \equiv \bar{h}\left(\phi_g(x), \dots, \phi_g^{(\bar{\alpha})}(x, \dots, x^{(\bar{r})})\right).$$

Deux sorties plates différentes s'échangent par une "**transformation non-linéaire uni-modulaire**" :

$$\bar{y} = \psi(y, \dots, y^{(\mu)}) \quad \text{d'inverse} \quad y = \bar{\psi}(\bar{y}, \dots, \bar{y}^{(\bar{\mu})})$$



Dynamique du pendule ponctuel  $H$  isochrone de Huygens :

$$m \frac{d^2}{dt^2} H = \vec{T} + m\vec{g}$$

$$\vec{T} // \vec{HS}$$

$$\|\vec{HS}\|^2 = l$$

- Le point de suspension  $S \in \mathbb{R}^3$  est le contrôle
- Le **centre d'oscillation**  $H \in \mathbb{R}^3$  est la sortie plate : comme  $\vec{T}/m = \frac{d^2}{dt^2} H - \vec{g}$  et  $\vec{T} // \vec{HS}$ ,  $S$  est solution du système algébrique suivant :

$$\vec{HS} // \frac{d^2}{dt^2} H - \vec{g} \quad \text{et} \quad \|\vec{HS}\|^2 = l.$$



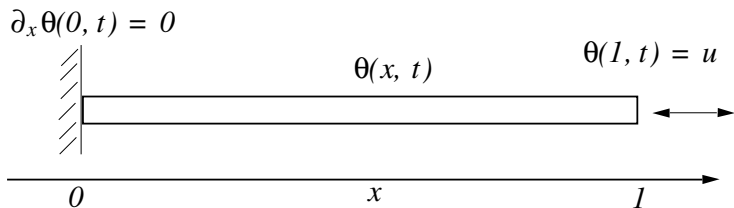
- Dans un plan vertical :  $H$  de coordonnées  $(y_1, y_2)$  et  $S$  de coordonnées  $(u_1, u_2)$  vérifient

$$(y_1 - u_1)^2 + (y_2 - u_2)^2 = l, \quad (y_1 - u_1) \left( \frac{d^2}{dt^2} y_2 + g \right) = (y_2 - u_2) \frac{d^2}{dt^2} y_1.$$

Trouver  $[0, T] \ni t \mapsto y(t) \in C^2$  tel que  $y(0) = (0, -l)$ ,  $y(T) = (0, l)$  et  $y^{(1,2)}(0, T) = 0$ , de sorte qu'il existe  $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in C^0$  tel que  $u(0) = u(T) = 0$  (passage de la branche stable à la branche instable).

- **Question** : pour un système plat où le contrôle  $u$  est solution du système algébrique  $P(u, y, \dots, y^{(\beta)}) = 0$  ayant plusieurs branches, donner les conditions sur  $P$  et construire ensuite  $t \mapsto y(t)$  permettant à  $u$  de **passer continûment d'une branche à une autre** au cours du temps.

- **Critère des variétés réglées** : si  $F(x, \frac{d}{dt}x) = 0$  est plat, alors pour tout  $(x, p)$  tel que  $F(x, p) = 0$ , existe  $a \neq 0$  tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $F(x, p + \lambda a) = 0$ .
- Caractérisation **pour  $\dim F = \dim x - 1$**  (système à un seul contrôle) : la CNS de linéarisation par bouclage statique (les seules variétés réglées de dimension 1 sont des droites).
- Pour les systèmes **linéaires en contrôle**,  $\frac{d}{dt}x = \sum_{k=1}^m u_k f_k(x)$  : CNS de platitude si  $\dim u = 2$  (résultat de Cartan (1914) sur les systèmes de Pfaff et équation de Monge) ; si  $\dim x \leq 5$ , plat ssi  $\dim(\text{Lie}(f_1, \dots, f_m)) = \dim x$  (Martin-R 1995).
- La caractérisation "en terme fini" reste un **problème ouvert** lorsque  $\dim F \leq \dim x - 2$  (borner les ordres de dérivation en fonction de  $\dim x$ ).
- **Exemples** :
  - $\frac{d}{dt}x_1 - (\frac{d}{dt}x_2)^2 - (\frac{d}{dt}x_3)^2 = 0$  non plat dans  $\mathbb{R}$  mais plat dans  $\mathbb{C}$ .
  - $\frac{d}{dt}x_1 - x_2 - (\frac{d}{dt}x_2 - x_1 \frac{d}{dt}x_3)^2 \frac{d}{dt}x_3 = 0$  vérifie le critère des variétés réglées mais on ne sait pas s'il est plat.



**Fourier** :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  sur  $[0, 1]$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$  et  $\theta(1, t) = u(t)$

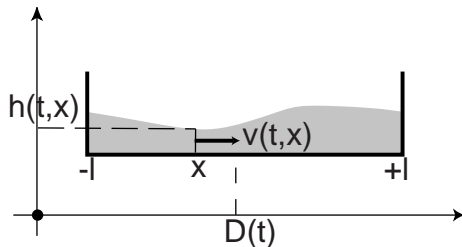
Paramétrisation des trajectoires via  $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $C^\infty$  ( $y(t) := \theta(0, t)$ )

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!} x^{2i}, \quad u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!}.$$

**Série entière** en  $x$  dès que  $y$  est d'**ordre Gevrey**  $\sigma < 2$  :

$$\exists K, M > 0, \quad \forall t, \forall i \geq 0, \quad |y^{(i)}(t)| \leq M(Ki)^{\sigma i}.$$

**Question** :  $y$  d'ordre  $> 2$  et sommation au plus petit terme des séries.



Saint-Venant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{d^2 D}{dt^2} \\ v(t, -l) = v(t, l) &= 0. \end{aligned}$$

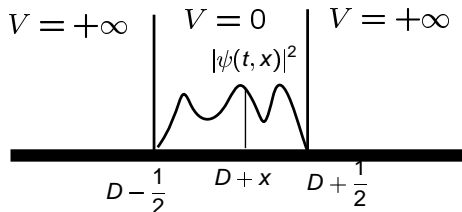
**Petites variations** :  $h = \bar{h} + H$ ,  $|H| \ll \bar{h}$ ;  $|\ddot{D}| \ll g$ ,  $|v| \ll c = \sqrt{g\bar{h}}$ .

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x}(t, -l) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, l) = -\frac{1}{g} \frac{d^2 D}{dt^2}$$

**Paramétrisation des trajectoires** passant par un point d'équilibre :

$$H(t, x) = \sqrt{\frac{\bar{h}}{4g}} \left( y' \left( t + \frac{x}{c} \right) - y' \left( t - \frac{x}{c} \right) \right), \quad D(t) = \frac{y(t + \Delta) + y(t - \Delta)}{2}$$

où  $\Delta = \frac{l}{c}$ ,  $t \mapsto y(t)$  est fonction arbitraire  $KC^3$  du temps.



Dans le repère de la boîte de position  $D$ , le contrôle :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + x \frac{d^2 D}{dt^2} \psi$$

$$\psi\left(-\frac{1}{2}, t\right) = \psi\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0$$

On pose  $\psi(x, t) = \exp(-i\bar{\omega}t)(\bar{\psi}(x) + \Psi(x, t))$  avec  $\Psi$  **petite variation** autour le l'état fondamental  $\bar{\psi}(x) = \cos(\bar{\omega}x)$  d'énergie  $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{2}$  :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{\omega} \Psi = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + x \frac{d^2 D}{dt^2} \bar{\psi}, \quad \Psi\left(-\frac{1}{2}, t\right) = \Psi\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0.$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar{\omega} \Psi = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} + x \frac{d^2 D}{dt^2} \bar{\psi}, \quad \Psi(-\frac{1}{2}, t) = \Psi(\frac{1}{2}, t) = 0.$$

Avec  $' \equiv \partial/\partial x$ , la solution de  $(is + \bar{\omega})\Psi = -\frac{1}{2}\Psi'' + s^2 Dx \bar{\psi}$  est

$$\Psi = \mathcal{A}(s, x)a(s) + \mathcal{B}(s, x)b(s) + \mathcal{C}(s, x)D(s)$$

où

$$\mathcal{A}(s, x) = \cos\left(x\sqrt{2is + 2\bar{\omega}}\right), \quad \mathcal{B}(s, x) = \frac{\sin\left(x\sqrt{2is + 2\bar{\omega}}\right)}{\sqrt{2is + 2\bar{\omega}}}$$

$$\mathcal{C}(s, x) = (-isx\bar{\psi}(q) + \bar{\psi}'(q)).$$

Les conditions au bord donnent ( $x \mapsto \bar{\psi}(x)$  est paire)

$$\mathcal{A}(s, 1/2)a(s) = 0, \quad \mathcal{B}(s, 1/2)b(s) = -\psi'(1/2)D(s).$$

$a(s)$  est un élément de torsion : le système linéarisé n'est pas commandable .

Cependant pour les trajectoires passant par  $\Psi = 0$ ,  $a(s) \equiv 0$  et alors

$$D(s) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}\right)}{\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}} \sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}} y(s)$$

$$\Psi(s, x) = \mathcal{B}(s, x)b(s) + \mathcal{C}(s, x)D(s)$$

avec

$$\mathcal{B}(s, x) = \frac{\sin(x\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}})}{\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}}}$$

$$\mathcal{C}(s, x) = (-\imath s x \bar{\psi}(q) + \bar{\psi}'(q))$$

$$b(s) = -\bar{\psi}'(1/2) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}\right)}{\sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}} y(s).$$

$$D(s) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}}\right)}{\sqrt{2\imath s + 2\bar{\omega}}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}\right)}{\sqrt{-2\imath s + 2\bar{\omega}}} y(s) = F(s)y(s)$$

- La fonction entière  $s \mapsto F(s)$  est d'ordre  $1/2$ ,

$$\exists K, M > 0, \forall s \in \mathbb{C}, \quad |F(s)| \leq K \exp(M|s|^{1/2}).$$

On a  $F(s) = \sum_{n \geq 0} a_n s^n$  avec  $|a_n| \leq (K_0 n)^{-2n}$  et  $K_0 > 0$  indépendant de  $n$ .

- Donc  $F(s)y(s)$  devient dans le domaine temporel ( $s = \frac{d}{dt}$ )

$$\sum_{n \geq 0} a_n y^{(n)}(t)$$

une série convergente dès que  $t \mapsto y(t)$  est  $C^\infty$  d'ordre Gevrey  $< 2$  : i.e.  $\exists M, K > 0$  et  $\exists \sigma \in [0, 2[$  tel que

$$\forall t, \quad \forall n, \quad |y^{(n)}(t)| \leq M(Kn)^{\sigma n}.$$



Pour aller de  $\Psi = 0, D = 0$  à  $t = 0$ , à  $\Psi = 0, D = \bar{D}$  à  $t = T$ , on peut utiliser, par exemple,

$$[0, T] \ni t \mapsto y(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ \bar{d} \frac{\exp\left(-\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)}{\exp\left(-\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) + \exp\left(-\left(\frac{T}{T-t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)} & \text{for } 0 < t < T \\ \bar{d} & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

où  $\bar{d} = \frac{2\bar{\omega}\bar{D}}{\sin^2(\sqrt{\bar{\omega}}/2)}$  et avec  $0 < \sigma < 1$ . Le fait que cette fonction est d'ordre Gevrey  $\sigma + 1$  résulte de sa **décroissance exponentielle** en  $1/\sigma$  en 0 et 1.

La formule de **Cauchy pour le calcul des dérivées** :

$$y^{(n)}(t) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{y(t+\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

où  $\gamma$  est un contour autour de 0. Alors  $\sum_{n \geq 0} a_n y^{(n)}(t)$  devient

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{y(t+\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{\xi^{n+1}} \right) y(t+\xi) d\xi.$$

Mais

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{\xi^{n+1}} = \int_{D_\delta} F(s) \exp(-s\xi) ds = B_1(F)(\xi)$$

est la **transformée de Borel** d'ordre 1 de  $F$ .

Dans le domaine temporel  $F(s)y(s)$  devient

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} B_1(F)(\xi) y(t + \xi) d\xi$$

où  $\gamma$  est un contour entourant 0. Cette **représentation "intégrale"** est très utile lorsque  $y$  est défini à partir du **signal réel**  $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}$  ( $\epsilon > 0$  paramètre de régularisation) :

$$y(\zeta) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\zeta - t)^2/2\epsilon^2) Y(t) dt$$

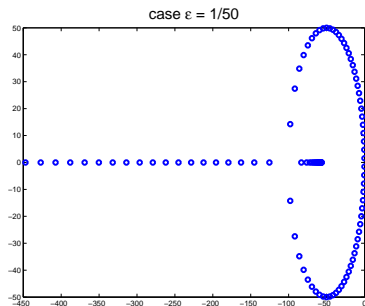
où  $\mathbb{R} \ni t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}$  est une fonction mesurable bornée :

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{i\epsilon(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \oint_{\gamma} B_1(F)(\xi) \exp(-(\xi - \tau)^2/2\epsilon^2) d\xi \right]}_{k(\tau)} Y(t - \tau) d\tau$$

**Convolution** avec une fonction  $k(\tau)$  petite dès que  $|\tau| \gg \epsilon$ .

- **Onde 1D** :  $u = \cosh(s)y$ . Cas général similaire :  $u = P(s)y$  où les zéros de  $P$  sont les modes propres  $\pm\omega_n$  avec comme asymptotique  $\omega_n \sim n$ ;  $P(s)$  fonction entière d'ordre 1 et de type fini (avance/retard à support compact).
- **Diffusion 1D** :  $u = \cosh(\sqrt{s})u$ . Cas général similaire :  $u = P(s)y$  où les zéros de  $P$  sont les valeurs propres  $-\lambda_n$  avec comme asymptotique  $\lambda_n \sim n^2$ ;  $P(s)$  fonction entière d'ordre 1/2 (somme infinie de dérivées de Dirac sur les fonctions d'ordre Gevrey  $< 2$ ).
- **Onde 2D** : comme  $\omega_n \sim \sqrt{n}$ ,  $P$  entière d'ordre 2 mais de type infini; prototype  $P(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n}\right) \exp(s^2/n) = \frac{-\exp(\gamma s^2)}{s^2 \Gamma(-s^2)}$ .
- **Diffusion 2D** : comme  $\lambda_n \sim -n$ ,  $P$  entière d'ordre 1 mais de type infini; prototype  $P(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \exp(-s/n) = \frac{\exp(-\gamma s)}{s \Gamma(s)}$ .

**Question ouverte** : interprétation de  $P(s)$  dans le domaine temporel en tant qu'opérateur sur une classe de fonctions  $y(t)$ .



$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial t}$$

$$H(0, t) = 0, \quad H(1, t) = u(t)$$

où les valeurs propres sont données par les zéros de

$$P(s) = \cosh \left( \frac{s}{\sqrt{\epsilon s + 1}} \right).$$

La **commandabilité approchée** dépend de l'espace fonctionnel choisi pour définir correctement le problème de Cauchy<sup>1</sup>

1. Rosier-R, CAO'06. 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation. 2006.

## Un modèle simple :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E + D) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \omega_0^2(\epsilon E - D)$$

où  $\omega_0$  est une fréquence d'absorption atomique et  $\epsilon$  est la force du couplage avec le champ  $E$  qui se propage.

- Le **spectre** fait intervenir les fonctions ( $s = d/dt$  variable de Laplace,  $L$  longueur)

$$Q^\pm(s, L) = \exp\left(\pm \frac{Ls}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{\epsilon s^2}{\omega_0^2 + s^2}\right)}\right)$$

La **singularité essentielle** en  $s = \pm i\omega_0$  implique une **accumulation** des fréquences propres en  $\pm\omega_0$ .

- Peu d'études que ce type d'EDP linéaires.